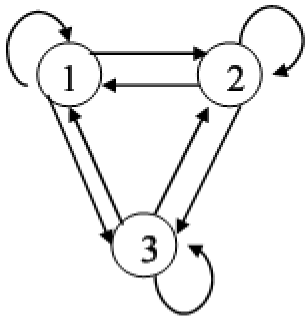
שרשראות מרקוב

<u>שימו לב : בהרצאה של פרופ וישנה מטריצות המעבר הוגדרו בצורה המשוחלפת, כשוקטור המצבים הוא וקטור עמודה ולא שורה ובהתאם הכפל במטריצת המצבים הוא מימין ולא משמאל.</u>

שרשרת מרקוב בזמן בדיד היא תהליך אקראי (בזמן בדיד = "צעדים") כאשר בכל נקודת זמן אנו נמצאים במצב מסוים ויש לנו הסתברויות קבועות (וידועות) לנוע לאחד מהמצבים האחרים.
לדוגמה : בביצה 3 סלעים. צפרדע הנמצאת על סלע מס' 1 מחליטה אם לקפוץ לסלע מס' 2
בהסתברות 0.4 או לסלע מס' 3 בהסתברות 0.5 או להשאר במקומה בהסתברות 0.1.
המצב מתואר להלן :



<u>מטריצת הסתברויות המעברים</u>

$$\begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0.1 & 0.4 & 0.5 \\ 0.2 & 0.5 & 0.3 \\ 0.3 & 0.2 & 0.5 \end{bmatrix} \end{array}$$

המטריצה משמאל מתארת את השרשרת המרקובית. ההסתברויות בתוך המטריצה הן הסתברויות <u>מותנות</u>. כך למשל בעמוד 1 שורה 2 – המספר 0.2 משמעותו שבהנתן שאנו מצויים במצב 2 ההסתברות שנעבור למצב 1 בצעד הבא היא 0.2 $\{P(X_{n+1}=1 \mid X_n=2)=0.2\}$, שנשאר במצב 2 היא 0.5 $\{P(X_{n+1}=2 \mid X_n=2)=0.5\}$, ושנעבור למצב 3 היא 0.3
אנו נייצג את השרשרת במטריצה שכל שורה שלה מסתכמת ל-1. (אפשר כמובן לעבוד עם המטריצה המשוחלפת).

<u>שאלה 1</u>
מצב השמיים ביום מסויים יכול להיות אחד משני מצבים אפשריים בלבד :
1- מעונן ,2- שמשי (שמיים נקיים).
המצב ביום מסויים תלוי אך ורק במצב שהיה ביום שלפניו, האופן הבא :
אם ביום מסוים היה <u>מעונן</u> למחרת יהיה <u>מעונן</u> בהסתברות 0.4 ו<u>שמשי</u> בהסתברות 0.6.
אם ביום מסוים היה <u>שמשי</u> למחרת יהיה <u>שמשי</u> בהסתברות 0.8 ו<u>מעונן</u> בהסתברות 0.2.
א. בנו את מטריצת הסתברויות המעברים של המצב המתואר לעיל.
ב. בהנחה שביום ראשון מעונן, מה ההסתברות שביום רביעי מעונן?
<u>*פתרון :*</u>
א.

$$\begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cc} 1 & 2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0.4 & 0.6 \\ 0.2 & 0.8 \end{bmatrix} \end{array}$$

ב.
בכדי למצוא את המצב בעוד שלושה ימים נחשב :

$$P^{(3)} = P^3 = \begin{bmatrix} 0.4 & 0.6 \\ 0.2 & 0.8 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0.4 & 0.6 \\ 0.2 & 0.8 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0.4 & 0.6 \\ 0.2 & 0.8 \end{bmatrix}$$

$$= P^2 P = \begin{bmatrix} 0.28 & 0.72 \\ 0.24 & 0.76 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0.4 & 0.6 \\ 0.2 & 0.8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.256 & 0.744 \\ 0.248 & 0.752 \end{bmatrix}$$

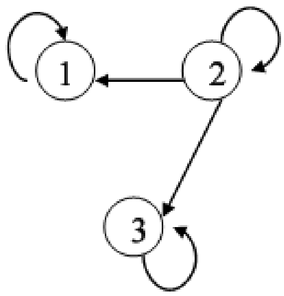
ההסתברות המבוקשת היא 0.256.

שאלה 2
נתונה מטריצת הסתברויות המעברים הבאה :

$$M = \begin{array}{c|ccc} & 1 & 2 & 3 \\ 1 & & & \\ 2 & & & \\ 3 & & & \end{array} \quad M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0.2 & 0.4 & 0.4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

א. שרטטו את גרף המעברים.
ב. סווגו את המצבים

פתרון :
א.



ב. המצב 2 הוא מצב חולף. המצבים 1 ו-3 הם מצבים מתמידים-סופגים.

שאלה 3
מצב השמיים ביום מסויים יכול להיות אחד משלושה מצבים אפשריים בלבד :
1- מעונן,2- מעונן חלקית,3 - שמיים נקיים. נתונה מטריצת הסתברויות המעברים :

$$P = \begin{bmatrix} 0.4 & 0.6 & 0 \\ 0.2 & 0.5 & 0.3 \\ 0.1 & 0.7 & 0.2 \end{bmatrix}$$

חשבו את ההתפלגויות הגבוליות של השרשרת.

פתרון :
א. מערכת משוואות שיווי המשקל (והנרמול) מתקבלת מ- :

$$\pi_j = \sum_{i=1}^{3} \pi_j p_{ij} \quad , \sum_{j=1}^{3} \pi_j = 1, \qquad j = 1,2,3$$

ובפירוט :

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \pi_1 & \pi_2 & \pi_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \pi_1 & \pi_2 & \pi_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.4 & 0.6 & 0 \\ 0.2 & 0.5 & 0.3 \\ 0.1 & 0.7 & 0.2 \end{bmatrix} \\ \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1 \end{cases}$$

ובהצגה של מערכת משוואות לינאריות:

$$\pi_1 = 0.4\pi_1 + 0.2\pi_2 + 0.1\pi_3$$
$$\pi_2 = 0.6\pi_1 + 0.5\pi_2 + 0.7\pi_3$$
$$\pi_3 = 0.3\pi_2 + 0.2\pi_3$$
$$\pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1$$

<u>שימו לב</u> שמקבלים מערכת של 4 (n+1) משוואות עם 3 (n) נעלמים.
לכן אפשר לבחור את 3 המשוואות הנוחות לנו ולפתור אותן, מקבלים:

$$\begin{aligned} \pi_1 &= 0.2235 \\ \pi_2 &= 0.5647 \quad \Rightarrow \qquad \pi = (0.2235, 0.5647, 0.2118) \\ \pi_3 &= 0.2118 \end{aligned}$$

כלומר, בהסתברות 0.2235 יהיה יום מעונן, בהסתברות 0.5647 יהיה יום מעונן חלקית ובהסתברות 0.2118 יהיו שמיים נקיים ביום מסוים.

<u>שאלה 4</u>
נתונות מטריצות הסתברויות המעברים הבאות:

א. $\begin{bmatrix} 0.2 & 0 & 0 & 0.8 \\ 0.4 & 0.2 & 0 & 0.4 \\ 0.4 & 0.4 & 0.2 & 0 \\ 0 & 0.4 & 0.4 & 0.2 \end{bmatrix}$

ב. $\begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} 1 & 2 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1/5 & 4/5 \end{bmatrix} \end{array}$

חשבו את ההתפלגויות הגבוליות של כל אחת מהשרשרות הנ״ל.

<u>פתרון:</u>
א. מערכת משוואות שיווי המשקל (והנרמול) מתקבלת מ-:

$$\pi_j = \sum_{i=1}^{4} \pi_j p_{ij} \quad , \sum_{j=1}^{4} \pi_j = 1, \qquad j = 1,2,3,4$$

מתקבלת המערכת (מוצגות המשוואות הנוחות לפתרון בלבד ללא המשוואה עבור π_4):

$$\begin{cases} \pi_1 = 0.2\pi_1 + 0.4\pi_2 + 0.4\pi_3 \\ \pi_2 = 0.2\pi_2 + 0.4\pi_3 + 0.4\pi_4 \\ \pi_3 = 0.2\pi_3 + 0.4\pi_4 \\ \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 + \pi_4 = 1 \end{cases}$$

שפתרונה:

$$\pi_1 = \frac{5}{23}, \pi_2 = \frac{6}{23}, \pi_3 = \frac{4}{23}, \pi_4 = \frac{8}{23}$$

ב. מערכת משוואות שיווי המשקל (והנרמול) מתקבלת מ-:

$$\pi_j = \sum_{i=1}^{2} \pi_j p_{ij} \quad , \sum_{j=1}^{2} \pi_j = 1, \qquad j = 1,2$$

מתקבלת המערכת:

$$\begin{cases} \pi_1 = \pi_1 + \frac{1}{5}\pi_2 \\ \pi_2 = \frac{4}{5}\pi_2 \\ \pi_1 + \pi_2 = 1 \end{cases}$$

שפתרונה:

$$\pi_1 = 1, \pi_2 = 0$$

(כפי שהיינו מצפים, מכיוון ש-1 הוא מצב סופג בשרשרת).

<u>שאלה 5</u>

נתונה מטריצת הסתברויות המעברים (1- מעונן,2- מעונן חלקית,3 - שמיים נקיים):

$$Q = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0.02 & 0.26 & 0.72 \\ 0.01 & 0.18 & 0.81 \end{bmatrix} \end{array}$$

בהנתן שהשרשרת נמצאת במצב 3 חשבו את תוחלת מספר הצעדים עד להגעה ראשונה למצב 1.

<u>פתרון:</u>

נגדיר m_i כתוחלת מספר הצעדים עד שהשרשרת שנמצאת כעת (זמן אפס) במצב i נכנסת בפעם הראשונה למצב 1. (כך למשל $m_1 = 0$ כלומר בהינתן שאנו כבר במצב 1 תוחלת מספר הצעדים להגיע למצב אחד היא 0).

חישוב התוחלת הינו רקורסיבי ומבוסס על חלוקת המסע בצעדים לשתי קבוצות: קבוצה ראשונה (שלב ראשון) מכילה את הצעד הראשון (לצאת מהמצב שבו השרשרת מצויה) + קבוצה שניה (שלב שני) שאר הצעדים למצב המטרה.

m_3 = 1 + E{תוחלת מספר הצעדים בשלב השני}

השלב השני תלוי כמובן בתוצאות הצעד הראשון:

- בהסתברות 0.81 השרשרת מצאת במצב 3, בשל תכונת חוסר הזכרון של השרשרת, תוחלת מספר הצעדים בשלב הבא היא m_3 (המסע למצב 1 מתחיל מהתחלה בצעד הבא).
- בהסתברות 0.18 השרשרת עוברת למצב 2, בשל תכונת חוסר הזכרון של השרשרת, תוחלת מספר הצעדים בשלב הבא היא m_2 (המסע למצב 1 מתחיל מהתחלה בצעד הבא).
- בהסתברות 0.01 השרשרת עוברת למצב 1, הגענו למטרה ולכן תוחלת מספר הצעדים בשלב הבא היא 0.

נרכיב מהנ"ל את המשוואה:

$$m_3 = 1 + 0.81 m_3 + 0.18 m_2 \qquad (1)$$

משיקולים דומים ניתן לכתוב את המשוואה עבור m_2:

$$m_2 = 1 + 0.26 m_2 + 0.72 m_3 \qquad (2)$$

פתרון של המערכת (1) ו-(2): $m_2 = 81.537, \quad m_3 = 83.667$

כלומר בממוצע (=תוחלת) יקח 83.667 צעדים להגיע ממצב 3 (שמיים נקיים) למצב 1 (מעונן).

<u>שאלה 6</u>

נתונה מטריצת הסתברויות המעברים הבאה:

$$P=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0.25 & 0.25 & 0.25 & 0.25 \\ 0.4 & 0.3 & 0.2 & 0.1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

חשבו את ההסתברות שמי שמתחיל במצב 3 יגיע למצב 1 לפני שיגיע למצב 4.

<u>*פתרון:*</u>

נגדיר p_i כהסתברות שמי שנמצא במצב i יגיע למצב 1.

$$\begin{cases} p_3 = 0.4\cdot 1 + 0.3\cdot p_2 + 0.2\cdot p_3 + 0.1\cdot 0 \\ p_2 = 0.25\cdot 1 + 0.25\cdot p_2 + 0.25\cdot p_3 + 0.25\cdot 0 \end{cases}$$

קיבלנו מערכת משוואות שפתרונה: $p_2 = 0.5714, \quad \mathrm{p}_3 = 0.7143$

כלומר, ההסתברות שמי שמתחיל ממצב 3 יגיע למצב 1 לפני שיגיע למצב 4 היא 0.7143.