

תרגיל בית 3 – מבוא להסתברות וסטטיסטיקה

הגשה ב-23.08 בשיעור התרגיל

הערה: הניקוד לשאלה הוא ביחס למספר הסעיפים שלה, ולא רמת הקושי בפתרונה.

שאלה 1 [15 נק']

שחקן מטיל שתי קוביות משחק הוגנות, לבנה ושחורה. לאחר שראה את תוצאות ההטלה, a ו- b , הוא בוחר מספר שלם שנמצא בקטע $[a, b]$ בהסתברות שווה. לדוגמה: אם הקוביות הראו 4,6 המספר הנבחר יכול להיות אחד מהמס' 4,5,6 בהסתברות $1/3$. אם ידוע שאחרי הטלת הקוביות נבחר המספר 6, מה ההסתברות שהקובייה הלבנה הראתה 6 בהטלה?

שאלה 2 [15 נק']

לקוחות מגיעים למרכז שירות של חברה סלולרית לפי התפלגות פואסון. בממוצע מגיעים 4 לקוחות בדקה.
 א. אם ידוע שלפחות לקוח אחד הגיע בדקה מסוימת, מה ההסתברות שהגיעו סה"כ 3 לקוחות באותה דקה?
 ב. לבדיקת איכות השירות, מחליטים בחברה לדגום 10 קטעי זמן בני דקה כל אחד (לא חופפים) ביום עבודה מסויים, ולרשום את מספר הלקוחות המגיעים באותה דקה. אם באותו קטע זמן (דקה) הגיעו יותר מ-4 לקוחות, הקטע ייחשב עמוס. מה ההסתברות שיהיו לפחות 2 קטעים עמוסים כאלה מבין כל קטעי הזמן שנדגמו?

שאלה 3 [24 נק']

בקו ייצור כל פריט תקין בהסתברות 0.7, ללא תלות בפריטים האחרים. מתחילים לייצר פריטים עד אשר מיוצר פריט פגום ואז נפסק מיד הייצור ע"י בקרת האיכות.
 א. מצא את פונקציית ההסתברות של מספר הפריטים שנוצרו כולל הפריט הפגום.
 ב. מצא את פונקציית ההסתברות של מספר הפריטים שנוצרו ללא הפריט הפגום.
 ג. מה ההסתברות שנוצרו לפחות 5 פריטים תקינים?

עתה מפעילים את קו הייצור ללא בקרת איכות ומייצרים 10 פריטים בדיוק ועוצרים:

- ד. מצא את פונקציית ההסתברות של מספר הפריטים התקינים שנוצרו.
- ה. מה ההסתברות שהיו בייצור לפחות 2 פריטים פגומים?
- ו. בדקו 7 פריטים שנוצרו ומצאו שהם תקינים. מה ההסתברות שמ-3 הפריטים נותרים, לכל היותר פריט אחד פגום?

שאלה 4 [12 נק']

כד מכיל 4 כדורים לבנים ו-4 כדורים שחורים. מוציאים באקראי 4 כדורים ללא החזרה. אם 2 מהם לבנים ו-2 שחורים הניסוי מסתיים. אם לא, מחזירים את הכדורים לכד ושוב מוציאים באקראי 4 כדורים וממשיכים כמקודם עד שיש בדיוק 2 לבנים בין ה-4 שהוצאו. מה ההסתברות לחזור על הניסוי בדיוק n פעמים?

שאלה 5 [12 נק']

מספר החולצות שקונה אדם הנכנס לחנות הוא $X + 1$, כאשר $X \sim Bin(5, 0.8)$, בלתי תלוי בקונים האחרים. מספר האנשים שנכנסים לחנות במשך שעה מפולג פואסוניית עם פרמטר 20. מצא את תוחלת מספר החולצות הנמכרות בחנות בשעה כלשהי.

שאלה 6 [12 נק']

בכל אחת מ- 3 קופסאות יש 2 מחיצות. אחת הקופסאות מכילה בכל אחת מהמחיצות מטבע זהב, השניה מכילה בכל מחיצה מטבע כסף והשלישית מכילה באחת מהמחיצות מטבע כסף ובשניה מטבע זהב. קופסא אחת נבחרה באופן מקרי, לאחר מכן נבחרה מחיצה בקופסה באופן מקרי.
 א. מה ההסתברות שבמחיצה שנבחרה יש מטבע כסף?
 ב. המחיצה נפתחה ונמצא שם מטבע זהב. מה ההסתברות שבמחיצה השנייה מטבע כסף?

שאלה 7 [6 נק']

אוגוסטוס וברוטוס משחקים משחק. אוגוסטוס לוקח 2 קופסאות ושם בקופסא הראשונה x זוזים ובקופסא השנייה $2x$ זוזים. לאחר שאוגוסטוס סיים מגיע ברוטוס ופותח קופסא באקראי ורואה 100 זוזים. ברוטוס חושב האם כדאי לו לפתוח את הקופסא השנייה במקום? ברוטוס שלנו למד הסתברות ומחליט לחשב:
 $200 \cdot 0.5 + 50 \cdot 0.5 = 125$ -יש-
 ובעצם ברוטוס מגיע למסקנה שבכל מקרה עדיף לו לעבור קופסא? היכן ברוטוס טועה.

שאלה 8 [6 נק']

האם יש דרך לנצח את הקזינו? נבדוק!
 ישראל ישראלי טס ללאס וגאס וחושב על שיטה לתחמן את המערכת, הוא מתכוון להמר על רולטה בשיטה שמתוארת להלן-
 בשלב ראשון ישראלי שם על אדום דולר 1
 - אם הוא זכה הוא מתחיל את התהליך מההתחלה (מהמר שוב על דולר)
 - אם הוא הפסיד הוא מהמר על אדום 2 דולר
 אם הוא זכה בשלב זה, הוא מתחיל את התהליך מההתחלה (מהמר שוב על דולר)
 אחרת מהמר על אדום 4 דולר וכך הלאה.
 ישראל ישראלי אומר לעצמו בשלב מסוים, "תמיד אזכה ואז ארוויח פי 2 מכמות הכסף האחרונה ששיתי" כלומר:
 $1 + 2 + 4 + 8 + \dots + 2^{n-1}$ -ההפסד-
 הרווח- 2^n
 לכן בכל תהליך (שייעצר בשלב כלשהוא) ישראל ישראלי חושב שהוא ירוויח דולר 1 ולכן הוא תחמן את הקזינו. שימו לב שברולטה הסיכוי לקבל שחור או אדום אינו חצי חצי, יש 18 מספרים אדומים ו-18 שחורים ועוד שני מספרים ירוקים המסומנים: 0, 00. (אם יוצא ירוק הבית זוכה).
 א. הסבירו לישראל ישראלי שהוא טועה ובדקו מה יקרה אם לישראל ישראלי יש מליון דולר.
 ב. מה יקרה אם לישראל שלנו יש אינסוף כסף? (בדקו את התוחלת)?