

בחינה סופית בחשבון אינפיניטסימלי 2 מדמ"ח – 89-133

מועד א' תשע"ד

מרצה: ד"ר שמעון ברוקס, ד"ר יהודה שנפס

משך הבחינה: 3 שעות

חומר עזר: מחשבון

ענו על כל השאלות

1. חשב את

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \ln \left(\frac{nx+1}{nx} \right) \cdot nxdx = L$$

2. הוכח¹:

(א)

$$\frac{1}{4} \left(\frac{1}{1.25} + \frac{1}{1.5} + \frac{1}{1.75} + \frac{1}{2} \right) \leq \ln(2) \leq \frac{1}{4} \left(1 + \frac{1}{1.25} + \frac{1}{1.5} + \frac{1}{1.75} \right)$$

(ב)

$$\frac{1}{1+(0.25)^2} + \frac{1}{1+(0.5)^2} + \frac{1}{1+(0.75)^2} + \frac{1}{2} \leq \pi \leq 1 + \frac{1}{1+(0.25)^2} + \frac{1}{1+(0.5)^2} + \frac{1}{1+(0.75)^2}$$

(רמז: תחשבו על האינטגרלים $\int \frac{1}{x} dx$, $\int \frac{1}{1+x^2} dx$.)

¹החישוב הזה נותן את הקירובים: $0.63 \leq \ln(2) \leq 0.76$, $2.88 \leq \pi \leq 3.39$.

3. הוכח כי למשוואה

$$\int_0^x e^{-t^2} dt = x$$

יש פתרון אחד ויחיד בקטע $[-1, 1]$, ומצא את הפתרון.

4. הוכח שלכל מספרים שלמים $m, n \in \mathbb{Z}$

(א)

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(mx) \cos(nx) dx = 0$$

(ב)

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(mx) \sin(nx) dx = \begin{cases} \pi & m = n \\ 0 & m \neq n \end{cases}$$

(ג)

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(mx) \cos(nx) dx = \begin{cases} \pi & m = n \\ 0 & m \neq n \end{cases}$$

(רמז: אינטגרציה לפי חלקים יכולה לעזור פה.)

זכרו גם את הזהויות $\cos(2\alpha) = 1 - 2\sin^2(\alpha) = 2\cos^2(\alpha) - 1$

5. לכל אחד מהאינטגרלים הבאים, קבע האם האינטגרל מתכנס או מתבדר:

(א)

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2 + 1} dx$$

(ב)

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2 - 1} dx$$

(ג)

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}} dx$$

6.

(א) הוכח או הפרד: אם סדרת הפונקציות $f_n \rightarrow f \equiv 0$ נקודתית בקטע $[a, b]$ (כלומר, מתכנסת נקודתית לפונקציה $f(x) = 0$ לכל $x \in [a, b]$) אזי הסדרה $\left\{ \int_a^b f_n(x) dx \right\}$ חסומה.

(ב) האם הטור

$$\sum_{n=1}^{\infty} nx^{2n-1}$$

מתכנס בקטע $(-1, 1)$? אם כן, חשב סכומו.

7. בדוק התכנסות, התכנסות במ"ש של סדרת הפונקציות

$$f_n = x^n(1 - x^n)$$

על הקטע $[0, 1]$. מה לגבי הקטע $[a, 1]$ כאשר $0 < a < 1$?

8. תהי

$$f(x, y) = xy + \frac{x}{2}$$

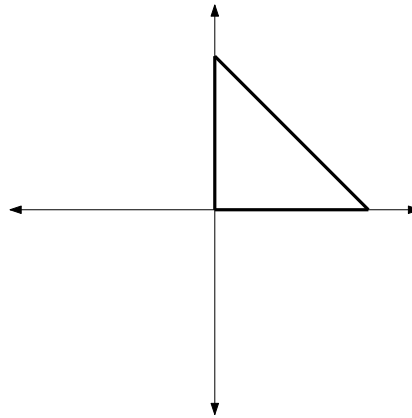
בתחום הסגור D (המצוייר למטה), המוגבל ע"י הישרים

$$x = 0$$

$$y = 0$$

$$y = 4 - x$$

האם יש ל- f מקסימום בתחום הזה? אם כן, מצא אותו.



בהצלחה רבה!