תרגיל 10 - פתרון

שאלה 1

יהי H מרחב הילברט, ו- M תת מרחב לינארי של H.

הוכיחו כי: $\bar{M} = (M^\perp)^\perp$.

פתרון:

יהיו $f \in \bar{M}$, $g \in M^\perp$: תהי $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq M$ כך ש- $\|f_n - f\| \to 0$.

אזי, מרציפות המכפלה הפנימית נקבל כי $\langle f_n, g\rangle \to \langle f, g\rangle$.

ומכיון שלכל n מתקיים $\langle f_n, g\rangle = 0$, הרי ש- $\langle f, g\rangle = 0$.

וכאמור, לכל $g \in M^\perp$ ולכל $f \in \bar{M}$ לכן $\bar{M} \subseteq (M^\perp)^\perp$. (1)

כעת, $\bar{M}$ תת מרחב לינארי סגור של מרחב הילברט H. לכן, לכל $x \in H$ קיימים $g \in M^\perp$, $h \in \bar{M}$ יחידים כך ש- $x = g + h$.

בפרט, עבור $f \in (M^\perp)^\perp$: $\exists!\, g_0 \in M^\perp, h_0 \in \bar{M} : f = g_0 + h_0$.

לפי (1), $h_0 \in (M^\perp)^\perp$, ומכיון ש $(M^\perp)^\perp$ תת מרחב לינארי, הרי ש:

$f, h_0 \in (M^\perp)^\perp \Rightarrow f - h_0 \in (M^\perp)^\perp$, כלומר: $g_0 \in (M^\perp)^\perp$.

לכן: $g_0 \in (M^\perp)^\perp \cap M^\perp$. אולם $(M^\perp)^\perp \cap M^\perp = \{0\}$.

קיבלנו: $0 = g_0 = f - h_0$, כלומר: $f = h_0$.

מכיון ש $h_0 \in \bar{M}$ הרי ש- $f \in \bar{M}$. וכאמור, לכל $f \in (M^\perp)^\perp$,

לכן $(M^\perp)^\perp \subseteq \bar{M}$.

בסה"כ: $(M^\perp)^\perp = \bar{M}$.

שאלה 2 : נגדיר: $F := \{ (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R} \mid \sup_n n|a_n| < \infty \}$

הוכיחו או הפריכו:

(א) F תת ליניארי של ℓ^2.

(ב) הקבוצה $F \cap \ell^2$ סגורה ב-ℓ^2.

פתרון: (א) נוכיח כי F תת ליניארי של ℓ^2:

ברור כי $0 \in F$, ובנוסף:

$$(a_n),(b_n) \in F \Rightarrow \sup_n n|a_n| \, , \, \sup_n n|b_n| < \infty$$

$$\Rightarrow \sup_n n(|a_n|+|b_n|) < \infty$$

$$\Rightarrow \sup_n n|a_n+b_n| < \infty \Rightarrow (a_n+b_n) \in F$$

$$(a_n)\in F, \ \alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow \sup_n n|a_n| < \infty$$

$$\Rightarrow \sup_n n|\alpha a_n| = \alpha \sup_n n|a_n| < \infty$$

$$\Rightarrow \alpha(a_n) \in F$$

הוכחנו כי F מרחב ליניארי.

נראה כי $F \subseteq \ell^2$: תהי $(a_n)\in F$ אזי:

$$M := \sup_n n|a_n| < \infty \Rightarrow \forall n\in\mathbb{N}: \ n|a_n| < M$$

$$\Rightarrow |a_n| \leq \frac{M}{n}$$

כעת הטור: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{M^2}{n^2}$ מתכנס, ולכן (לפי מבחן ההשוואה) הטור $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2$ מתכנס, לכן $(a_n)\in\ell^2$ כנדרש.

(ב) נמצא דוגמא נגדית: לכל $k\in\mathbb{N}$ נגדיר:

$$a_k = (a_n^k) := \begin{cases} a_n^k = \frac{1}{n^{3/4}} & n \leq k \\ a_n^k = 0 & n > k \end{cases}$$

אזי: הסדרה a_k מתכנסת בℓ^2 ל: $a=(a_n)=\left(\frac{1}{n^{3/4}}\right)_{\mathbb{N}}$

שכן: $\|a-a_k\|_2 = \sum_{n=k}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}} \xrightarrow{k\to\infty} 0$

(כזנב של טור מספרים מתכנס)

בנוסף, לכל k: $\sup_n n|a_n^k| = k^{1/4} < \infty$

ולכן $a_k=(a_n^k)\in F\subseteq \ell^2 \Leftarrow a_k\in F\cap\ell^2$.

אולם $\lim_{k\to\infty} a_k = a\notin F$ שכן:

$$\sup_n n|a_n| = \sup_n n^{1/4} = \infty$$

ולכן: $F\subset\ell^2$ לא סגורה בℓ^2.

שאלה 3

יהיו:
$u_1 = (1,2,0,0,\dots)$
$u_2 = (0,1,2,0,\dots)$
$\vdots$

1) הוכיחו כי המערכת $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ אינה שלמה במרחב ℓ^2.

2) נסמן: $U = \mathrm{span}\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$, $V = \mathrm{span}\{(1,0,0,\dots)\}$.
האם $U+V$ צפוף ב ℓ^2 ?

פתרון:

1) יהי $x \in \ell^2$ כך ש- $\forall n \in \mathbb{N}\ \langle x, u_n\rangle = 0$

כלומר:
$\langle x, u_1\rangle = 0 \Rightarrow x_1 + 2x_2 = 0$
$\langle x, u_2\rangle = 0 \Rightarrow x_2 + 2x_3 = 0$
$\vdots$

ובאופן כללי: $\langle x, u_n\rangle = 0 \Rightarrow x_n + 2x_{n+1} = 0$

קבלנו: $x = (x_n) = x_1 \cdot (a_n)$ כאשר $a_n = (-2)^{-n+1}$, $a = (a_n)$.

מסקנה: $\forall n \in \mathbb{N}\ \langle x, u_n\rangle = 0 \iff \exists t \in \mathbb{R} : x = t \cdot a$

כלומר: $(\mathrm{span}\{u_n\}_{n=1}^{\infty})^{\perp} = \mathrm{span}\{a\}$ (*)

כעת, נזכיר שהראינו בשאלה 1 כי: $\overline{\mathrm{span}\{u_n\}_{n=1}^{\infty}} = \left((\mathrm{span}\{u_n\}_{n=1}^{\infty})^{\perp}\right)^{\perp}$

לפי (*), הרי ש- $\overline{\mathrm{span}\{u_n\}_{n=1}^{\infty}} = (\mathrm{span}\{a\})^{\perp}$

אולם $span\{a\} \neq \{0\}$ ולכן $(span\{a\})^\perp \neq \ell^2$.

ונסיק שהמערכת $\{u_n\}_{n=1}^\infty$ אינה שלמה ב-ℓ^2.

2) נוכיח כי $U+V$ צפוף ב-ℓ^2:

צריך להראות כי $\overline{U+V} = \ell^2$.

כלומר, לפי שורה 1, ב': $((U+V)^\perp)^\perp = \ell^2$.

ולכן מספיק שנראה כי: $(U+V)^\perp = \{0\}$.

הוכחנו בתרגול כי $(U+V)^\perp = U^\perp \cap V^\perp$.

לכן, צ"ל: $U^\perp \cap V^\perp = \{0\}$.

יהי $x \in U^\perp \cap V^\perp$. אזי:

$x \in U^\perp$ לכן, לפי ההוכחה בסעיף הקודם: $\forall n \in \mathbb{N}: x_n = x_1(-a)^{1-n}$

בנוסף, $x \in V^\perp$ ולכן $x_1 = 0$.

ונסיק ש- $x_n = 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$, כלומר $x = \bar{0}$. ∎

שאלה 4

נניח ו H הינו מרחב הילברט עם בסיס בן מנייה ונניח כי $\|x_n\| \to \|x\|$ כאשר $n \to \infty$ וגם $\langle x_n, y\rangle \to \langle x, y\rangle$ לכל $y \in H$ כאשר $n \to \infty$.

הוכיחו כי $\|x_n - x\| \to 0$ כאשר $n \to \infty$.

פתרון:

מכיוון שיש לנו בסיס בן מנייה $\{\varphi_n\}$ נוכל לרשום $x_n = \sum_{k=1}^{\infty} a_k^n \varphi_n$ וגם $x = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \varphi_n$.

למדנו כי $a_k = \langle x, \varphi_k\rangle$ וגם כי $a_k^n = \langle x_n, \varphi_k\rangle$, ולכן מהנתון כי $\langle x_n, y\rangle \to \langle x, y\rangle$ נובע כי $a_k^n \to a_k$

ומהנתון כי $\|x_n\| \to \|x\|$ נובע כי $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k^n|^2 \to \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^2$.

אנחנו צריכים להוכיח כי $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k^n - a_k|^2 \to 0$ כאשר $n \to \infty$.

ברור כי $|a_k^n - a_k|^2 \le |a_k^n|^2 + |a_k|^2$ ולכן עפ"י משפט ההתכנסות הנשלטת נובע כי

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} |a_k^n - a_k|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \lim_{n\to\infty} |a_k^n - a_k|^2 = 0.$$

שאלה 5

תהי: $E := \{ x \in \ell^2 \mid \forall n \in \mathbb{N} : x_{2n-1} = x_{2n} \}$

1) הוכחו כי E תת סגור של ℓ^2.

2) מצאו את $E^\perp$.

3) יהי $x \in \ell^2$. מצאו את הקירוב הטוב ביותר של x ע"י E.

פתרון:

1) קל לבדוק כי E תת מרחב של ℓ^2 (ודאו!).

נוכיח כי E סגור ב-ℓ^2.

תהי $\{a^n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq E$ כך ש- $\|a^n - a\|_2 \to 0$ עבור $a \in \ell^2$.

צריך להוכיח כי $a \in E$.

$$\|a^n - a\|_2 = \sum_{k=1}^{\infty} |a_k^n - a_k|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |a_{2k-1}^n - a_{2k-1}|^2 + |a_{2k}^n - a_{2k}|^2 =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} |a_{2k-1}^n - a_{2k-1}|^2 + \sum_{k=1}^{\infty} |a_{2k-1}^n - a_{2k}|^2$$

$a^n \in E$, וכן הצד שמאל.

≥ 0 ≥ 0

לכן: $\|a^n - a\|_2 \to 0 \Leftarrow \|(a_{2k-1}^n)_N - (a_{2k-1})_N\|_2 \to 0$

וגם: $\|(a_{2k-1}^n)_N - (a_{2k})_N\|_2 \to 0$

ולכן, מיחידות הגבול, נקבל כי לכל k: $a_{2k-1} = a_{2k}$

כלומר: $a \in E$.

2) נגדיר: $F := \{x \in \ell^2 \mid \forall n \in \mathbb{N}: x_{2n-1} = -x_{2n}\}$

נראה כי: $E^\perp = F$.

יהי $x \in E^\perp$. אזי בפרט, לכל $k \in \mathbb{N}$, x מאונך לוקטור e^k שמוגדר:

$$e^k(j) = \begin{cases} 1 & j = 2k-1 \text{ או } j = 2k \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}$$

ולכן:

$$\forall k \quad x_{2k-1} + x_{2k} = 0$$

כלומר $x \in F$. ומכאן: $E^\perp \subseteq F$.

כמו כן, אם $x \in F$ אזי, לכל $y \in E$ מתקיים:

$$\langle x, y \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} x_{2k-1} y_{2k-1} + x_{2k} y_{2k} = \sum_{k=1}^{\infty} (-x_{2k}) y_{2k} + x_{2k} y_{2k} = 0$$

לכן $x \in E^\perp$, וזאת לכל $x \in F$, כלומר: $F \subseteq E^\perp$.

ובסה"כ: $E^\perp = F$.

3) יהי $x \in \ell^2$, לכל n:

$$(*) \qquad x_{2n-1} = \frac{x_{2n-1} + x_{2n}}{2} + \frac{x_{2n-1} - x_{2n}}{2}.$$

$$x_{2n} = \frac{x_{2n-1} + x_{2n}}{2} + \frac{x_{2n} - x_{2n-1}}{2}.$$

נגדיר: $g = (g_n)$: $g_{2n} = g_{2n-1} = \frac{x_{2n-1} + x_{2n}}{2}$

$h = (h_n)$: $-h_{2n} = h_{2n-1} = \frac{x_{2n-1} - x_{2n}}{2}$

אזי $g \in E$

ולפי הסעיף הקודם $h \in E^{\perp}$.

בנוסף, לפי (*), נקבל $x = g + h$. (**)

כיוון שהוכחנו בסעיף הראשון ש E הוא <u>סגור</u> הפירוק (**)

הזה יחיד, ו-g הוא ההיטל של x על E ששווה

לקירוב הטוב ביותר של x ל- E.