

הרשור

12.5.13

תהליך אורתוגונליזציה

קירוס לוב בדרך המוצגת

מבטל טמאות למערכות אורתוגונליות

ע"י עקרונות של פונקציות אורתוגונליות

ק"ס ויחידות של פונקציות אורתוגונליות

תהליך גרם-שמידט

נתונה מערכת המכילה פנימית $\mathcal{V}$ וכן איברים $u_1, u_2, \dots$ בתת-תחום.

נבחר את תהליך של בניית מערכת צגל תה"ה אורתוגונלית.

$$\begin{cases} v_1 = u_1 \\ w_1 = \frac{u_1}{\|u_1\|} \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_2 = u_2 - \langle u_2, w_1 \rangle w_1 \\ w_2 = \frac{v_2}{\|v_2\|} \end{cases}$$

$\vdots$

$$\begin{cases} v_n = u_n - \sum_{k=1}^{n-1} \langle u_n, w_k \rangle w_k = u_n - \sum_{k=1}^{n-1} \langle u_n, w_k \rangle w_k \\ w_n = \frac{v_n}{\|v_n\|} \end{cases}$$

ה-תחום של $\{w_k\}$ שווה ל- span של $\{u_k\}$, וכן כעת קיבלנו מערכת

אורתוגונלית צגל.

תהליך גרם-שמידט הינו יותר נוח למימוש, והמשיכה למערכת אורתוגונלית

מאשר שימוש במטריצות גרם-שמידט.

הקירוס הלוב ביותר

הצורה: נתונה מערכת צגל אורתוגונלית המרחבה המכילה פנימית $\mathcal{V}$

$$\langle v_n, v_k \rangle = \delta_{nk} = \begin{cases} 1 & n=k \\ 0 & n \neq k \end{cases}$$

י' לחשב את הערך $\|f - \sum_{k=1}^n a_k v_k\|$ כאשר $f \in \mathcal{V}$, ו- $a_k \in \mathbb{R}$ (הערה)

$$c_k \triangleq \langle f, v_k \rangle \quad \text{נתון}$$

$$\arg \min_{a_k} \left\{ \|f - \sum_{k=1}^n a_k v_k\|^2 \right\}$$

אנחנו נרצה

והטאדה a_k נקרא

$$\|f - \sum_{k=1}^n a_k v_k\|^2 = \langle f - \sum_{k=1}^n a_k v_k, f - \sum_{k=1}^n a_k v_k \rangle$$

$$= \langle f, f \rangle - \langle \sum_{k=1}^n a_k v_k, f \rangle - \langle f, \sum_{k=1}^n a_k v_k \rangle + \langle \sum_{k=1}^n a_k v_k, \sum_{k=1}^n a_k v_k \rangle$$

$$= \|f\|^2 - \sum_{k=1}^n a_k \langle v_k, f \rangle - \sum_{k=1}^n \bar{a}_k \langle f, v_k \rangle + \sum_m \sum_k a_k \bar{a}_m \langle v_k, v_m \rangle$$

$$= \|f\|^2 - \sum_{k=1}^n a_k \overline{\langle f, v_k \rangle} - \sum_{k=1}^n \bar{a}_k \langle f, v_k \rangle + \sum_m \sum_k a_k \bar{a}_m \langle v_k, v_m \rangle$$

$$= \|f\|^2 - \sum_{k=1}^n a_k \bar{c}_k - \sum_{k=1}^n \bar{a}_k c_k + \sum_{k=1}^n |a_k|^2$$

$$= \|f\|^2 - \sum_{k=1}^n (a_k \bar{c}_k + \bar{a}_k c_k) + \sum_{k=1}^n |a_k|^2$$

$$\begin{cases} 4a_k - c_k = (a_k - c_k)(\bar{a}_k - \bar{c}_k) \\ = |a_k|^2 + |c_k|^2 - (a_k \bar{c}_k + \bar{a}_k c_k) \end{cases}$$

תוצר-38

$$\begin{cases} |a_k - c_k|^2 = |a_k|^2 + |c_k|^2 - (a_k \bar{c}_k + \bar{a}_k c_k) \end{cases}$$

נניח

$$\|f - \sum_{k=1}^n a_k v_k\|^2 = \|f\|^2 + \sum_{k=1}^n (|a_k - c_k|^2 - |a_k|^2 - |c_k|^2) + \sum_{k=1}^n |a_k|^2$$

$$\|f - \sum_{k=1}^n a_k v_k\|^2 = \|f\|^2 + \sum_{k=1}^n |a_k - c_k|^2 - \sum_{k=1}^n |c_k|^2$$

מתקבל מנימוס כאשר $a_k = c_k$, ונקבל כי הטאדה שווה

$$\|f - \sum_{k=1}^n c_k v_k\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{k=1}^n |c_k|^2$$

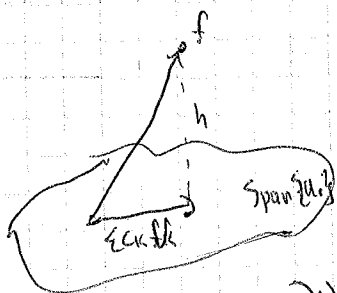
היחס תוצאה של הטאדה פיתאגורס המורחב

מתקבל כי $c_k = \langle f, v_k \rangle$ ניתן את

נקודה הטובה ביותר במרחב, כלומר

את הטאדה המינימלית.

הסיבה שאנו אומרים במרחב כי הזכר לפני בעזרתה



$$\sum_{k=1}^n |c_k|^2 \leq \|f\|^2 \quad \forall n$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2 \leq \|f\|^2$$

האי-שוויון האחרון נקרא אי-שוויון בסק.

השוויון המתקבל נקרא שוויון פרסבל (Parseval).

מתקבל שוויון כאשר ההתרחקות והרחקו שלמים.

ומתקבל שהערך מתכנס נובע, כי

$$\forall n \quad \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = 0$$

$$\left| \frac{x_n}{y_n} \right| \leq M \quad \text{הנדרש: אם מתקיים כי קיים } M \text{ כגון}$$

$$x_n = O(y_n) \quad \text{אם נמדד כי}$$

$$|x_n| \leq M |y_n|$$

כאן-כן מתקיים

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = 0$$

הסממן הוא $\frac{n}{e}$ אצמונז לנכאוו. (יהודי שחלפז)

סממן נוסף $\sim$ מכילטו קדיוה אסימפטוטי

$$\left(\frac{n}{e} \right)^n \sim n^n$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{n}{e} \right)^n}{n^n} = 1$$

המסק' שמאות שמערכות אורתונורמליות -

$$\text{I) } \|f\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2 \quad \forall f \in H \quad c_k = \langle f, v_k \rangle$$

$$\text{II) } f = \sum_{k=1}^{\infty} c_k v_k \quad \langle v_k, v_m \rangle = \delta_{km} = \begin{cases} 1 & k=m \\ 0 & k \neq m \end{cases}$$

$$\text{III) } \exists \alpha_k \text{ כגון } \|f - \sum_{k=1}^N \alpha_k v_k\| < \epsilon$$

$$\text{IV) } \exists f \neq 0 \quad ; \quad v_k = 0$$

לא קיים איבר שונה מ-0 המאונק לכל המערכות.

נ"מ V)
$$\left. \begin{aligned} f &\sim \{a_k\} \\ \phi &\sim \{a_k\} \end{aligned} \right\} \Rightarrow f = \phi$$

ה"מ VI)
$$\begin{aligned} f &\sim \{a_k\} \\ \phi &\sim \{b_k\} \\ \langle f, \phi \rangle &= \sum a_k \bar{b}_k \end{aligned}$$

הצגת f ו- ϕ כ- $\{a_k\}$ ו- $\{b_k\}$

הערה

שתיים או יותר ממשלה אחת אוסף הנקודות הקיימות I או II או III או IV או V או VI. (כולם מקובלים) וזוהי: שנים וחצי טקסונים, טלוי הוטל נון.

הוכחה שהם I טקס - II ?

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} c_k v_k$$
 , נתונים ב-II

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n c_k v_k = f$$
 כלומר

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists n > N ; \quad \left\| \sum_{k=1}^n c_k v_k - f \right\| < \epsilon$$

$$\left\| \sum_{k=1}^n c_k v_k - f \right\|^2 < \epsilon$$
 נעשה מהביטוי

ואם הקירוב הטוב ביותר בהחלט

$$\left\| f - \sum_{k=1}^n c_k v_k \right\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{k=1}^n |c_k|^2$$

וקיבלנו את הטבל I.

נסיביר את המעבר בין II - III (אם מתקיים III - צפיפות)

$$\forall \epsilon > 0 \quad \left\| f - \sum_{k=1}^n c_k v_k \right\|^2 < \epsilon$$

אם קיימת הצגה, אולי

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists n > N ; \quad \left\| \sum_{k=1}^n c_k v_k - f \right\|^2 < \epsilon$$

אם n (אם ההצגה) צדקת n - n (אם הצפיפות) אולי ניתן להוסיף אפסים

$$c_1 v_1 + 0 \cdot v_{n+1} + \dots$$

אם נחליף את a ב- a_k אולי נוכחנו כי ההרחק קטן יותר, כלומר

$$\|f - \sum_{k=1}^n c_k v_k\|^2 \leq \|f - \sum_{k=1}^n a_k v_k\|^2 \leq \varepsilon^2$$

עבור $a_k = c_k \forall k$ נקבל טיוו.

נקודות ב"ן II - III

$$f = \sum c_k v_k$$

נניח כי ניתן להביא f

ונניח כי $\phi \neq 0$ ~~הוא~~ האנך לכל המסגרת

$$\phi = \sum c_k v_k$$

אם מתקיים

$$\langle \phi, \phi \rangle = \langle \sum c_k v_k, \phi \rangle = 0$$

$$\forall v_k \perp \phi$$

$$\|\phi\|^2 = 0$$

נקבל

$$\phi = 0$$

כלומר

19.5.13

הרצאה 10

(I) שלמות מסכיבות אורתונורמליות

(II) שני עקרונות של בסיסיות אורתונורמליות.

(III) תכונות סימטריות

(IV) יוצרות מסכיבות

(V) שינוי תלת-בסיסה

נתונה מסכיבת אורתונורמלית $\{p_n(x)\}$ בקטל $[a, b]$, $f \in L^2_{[a, b]}$

כאשר $L^2_{[a, b]}$ אולם הכונקציות הרציבות (האיות C)

עם מכסה כפית / נורמה של L^2

הקטל $[a, b]$ עם כונקציות הקטל $p_n(x)$

$$\langle p_n(x), p_m(x) \rangle = \delta_{nm} = \begin{cases} 1 & n=m \\ 0 & n \neq m \end{cases}$$

שצורה המזכרת δ שלמה

הכוחה: $([a, b]) \ni f(x)$

כלי השכל וייחלואוס קיים בולטוס $p_n(x)$ כך שמתקיים

$$\forall \epsilon > 0 \exists p_n(x) ; \forall x \in [a, b] |f(x) - p_n(x)| < \epsilon$$

$$\forall \epsilon > 0 \exists p_n(x) ; \max_{a \leq x \leq b} |f(x) - p_n(x)| < \epsilon$$

נחשב את הנורמה של הפונקציה

$$\|f(x) - p_n(x)\|^2 = \int_a^b p_n(x) |f(x) - p_n(x)|^2 dx$$

כל בולטוס ניתן להצגה $\hat{e}_i$ בסיסיות אורתונורמליות עם הקציה כו"ה

$$p_n(x) = \sum_{k=1}^n c_k \hat{p}_k(x)$$

$$c_k = \langle p_n(x), p_k(x) \rangle$$

מקציה כו"ה הנכנס את הקטל

$$\int_a^b p_n(x) |f(x) - p_n(x)|^2 dx = \int_a^b p_n(x) |f(x) - \sum_{k=1}^n c_k \hat{p}_k(x)|^2 dx$$

$$d) \int_a^b p(x) |f(x) - \sum_{k=1}^N c_k \hat{p}_k|^2 dx \leq \int_a^b p(x) \cdot \max_{a \leq x \leq b} |f(x)|^2 \cdot \sum_{k=1}^N (c_k \hat{p}_k)^2 dx$$

$$\int_{\mathcal{E}^2} \int_a^b p(x) dx$$

$$\leq \varepsilon^2 \cdot \mu_0 \quad (\text{von GUNN} - \mu_0)$$

טו' עקרונות עבור כולם וכולם. מורחב ונמשך.

(I) מערכת כוֹסֵינוֹת אורטוגוֹנָלִים אִם־אֵין. מתקיים.

$$P_n(x) \perp P_m(x) \quad m < n$$

צ'י"א, שם כוסינוס האורך והחציית אפולוניוס. החזקה קטנה יותר מאו דוקאו.
התוצאות.

מכאן $\langle P_n(x), P_m(x) \rangle = 0$ ונכתב $P_n(x)$ ונכתב כי

ובפרט עבור מן הסוים, ולכן מתקיים רעיו' האורגניזציות עם המדינה.

כעת נתבונן בכיוון השני, נתונה מערכת צימודים Q מערכות מורכבות מ

מכיוון שגיתן מהצ'ים פוענחם כמ"ץ, בעלית אמר' המערכת, ואל' המערכת א"ל.

הסקנה: אם מתקיים $m < n$ ו $P_n(x) \in X^m$ אז $P_n(x) \in X^m$

אין $\{p_n\}$ הינה מערכת אורתונורמלית.

(II) מים עביר כח פאזנטים $\Pi_n(x)$, האקדס סם החלקה הצדוה קיודר מוה 1

$$\forall P_n(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0$$

355

$$\min \int_a^b p(x) |\pi_n(x)|^2 dx = \int_a^b p(x) \frac{|\hat{p}_n(x)|^2}{M_n} dx$$

1510

$$P_n(x) = \mu_n x^n + \dots + \mu_0$$

7812

$$\int_a^b p(x) \left| \frac{\hat{p}_n(x)}{\mu_n} \right|^2 dx = \frac{1}{\mu_n^2} \int_a^b p(x) |\hat{p}_n(x)|^2 dx$$

$$= \frac{1}{\mu_n^2} \cdot 1$$

$$\int_a^b p(x) |\hat{p}_n(x)|^2 dx = 1$$

כי לכל הנצרה

הוכחה: ~~נניח~~ נניח את $\hat{p}_n(x)$

$$\hat{p}_n(x) = \sum_{k=1}^{n-1} c_k \hat{p}_k(x) + \frac{\hat{p}_n(x)}{\mu_n}$$

$$|\hat{p}_n(x)|^2 = \sum_{k=1}^{n-1} c_k^2 + \frac{1}{\mu_n^2}$$

לפי משפט פיתגורס.

נרצה למצוא את הפונקציות המתוקן $\hat{p}_n(x)$ עם הנורמה הקטנה ביותר.

$$\min_{\{c_k\}} \int_a^b |\hat{p}_n(x)|^2 dx = \min_{\{c_k\}} \left\{ \sum_{k=1}^{n-1} c_k^2 + \frac{1}{\mu_n^2} \right\}$$

ונקבע את המינימום עבור $c_k = 0$ לכל k , זהו

$$\min_{\{c_k\}} \int_a^b |\hat{p}_n(x)|^2 dx = \frac{1}{\mu_n^2} = |\hat{p}_n(x)|^2$$

מסקנה: המינימום מתקבל עבור פולינומים אורתוגונליים מתוקנים.

הכייוון ההפוך: פולינומים אורתוגונליים מתוקנים יתנו נורמה מינימלית.

לפיכך כל הפולינומים המתוקנים.

איכות הסריכות אורתוגונליות.

השטח: לכל מקדם α וכל קטע (a, b) קיימת סריכות אורתוגונליות.

אחד. (סריכות אורתוגונליות) עד כדי קבוע.

ומקדם החלקה הנצורה ביותר חיובי $0 < \mu_n$.

$$\hat{p}_n(x) = \mu_n x^n + \dots + \mu_1 x + \mu_0$$

הוכחה: נניח כי $\mu_n, \mu_{n-1}, \dots, \mu_1$ מניי' מניי' אורתוגונליות.

אנחנו גם הזכרנו $\hat{p}_n = A \hat{p}_n + B$ מהווה סריכות אורתוגונלית.

עבור כל A, B .

$$\int_a^b P(x) \cdot P_n(x) F_m(x) dx = 0$$

טבער (הקטע) $(-a, a)$

$$\int_{-a}^a P(x) P_n(x) F_m(x) dx = 0$$

$$x = -t$$

$$\int_{-a}^a P(-x) P_n(-x) F_m(-x) dx = \int_{-a}^a P(x) P_n(-x) F_m(-x) dx$$

$$= \int_{-a}^a P(x) P_n(-x) F_m^*(x) dx = 0$$

הסקנה: קיבלנו כי יש המערכות $\{P_n(-x)\}$ האונות שלם כוללות מספר נמוך

ולכן יש המערכות $\{P_n(-x)\}$ אורטונורמליות, אוק וטבעט יחידות.

כעבור $\{P_n(-x)\} = \{P_n(x)\}$

נראה את המקדמים, של החלקה הנקודה ביותר

$$\mu_n x^n = c \mu_n (-x)^n = c (-1)^n \mu_n x^n$$

$$c = (-1)^n$$

ולכן

$$P_n(-x) = (-1)^n P_n(x)$$

כעבור,

טיווח תלת-נטייה

טבעט: נעונה מערכות אורתונורמליות $\{\hat{P}_n(x)\}$ מעט הקטע (a, b)

עם מונקיות נשקף P_n .

אולי כל מערכות מק"לות:

$$\hat{P}_n(x) = \mu_n x^n + \dots + \mu_0 \quad \mu_n > 0 \quad \text{ההנחה}$$

$$\hat{P}_{n+1}(x) = (x - c_n) \hat{P}_n(x) + \left(\frac{\mu_n}{\mu_{n+1}} \right) \hat{P}_{n-1}(x)$$

כעבור: אם יבצעים המקדמים $\mu_0, \mu_1, \dots, \mu_n$, והמקדמים $\mu_{n+1}, \mu_{n+2}, \dots$

אזי ניתן לטבא את כל המערכות.

הוכחה: הביטוי $x \hat{P}_n(x)$ הוא סך התוצקה האפשרית ביותר.

נציג בעזרת המערכת

$$x \hat{P}_n(x) = \sum_{k=0}^{n+1} c_k \hat{P}_k(x)$$

$$c_k = \langle x \hat{P}_n(x), \hat{P}_k(x) \rangle$$

$$c_k = \int_a^b x \hat{P}_n(x) \cdot \hat{P}_k(x) \cdot p(x) dx$$

כלומר, לטכניקה הקרויה $\hat{P}_n$ מאונק, לכל פולינום מציינה נאמרה

ולכן, עבור $n < k-1$ נקבל $c_k = 0$, ונקבל

$$x \hat{P}_n(x) = c_{n-1} \hat{P}_{n-1}(x) + c_n \hat{P}_n(x) + c_{n+1} \hat{P}_{n+1}(x)$$

$$c_{n+1} \hat{P}_{n+1}(x) = (x - c_n) \hat{P}_n(x) - c_{n-1} \hat{P}_{n-1}(x)$$

26.5.13

הרצאה 11

המשק של משוואת נסיפה

זהות של צדדו - כריסטיאן

תכונות אופסית של $P_n(x)$

או מקור

ב) פולינומים סקרים עלו מתאוסים באותה התקודה.

$$P_n(x) = 0 \quad \text{אוקס} \quad \text{לנו מתקיים} \quad P_{n+1}(x) = 0$$

$$P_{n-1}(x) \cdot P_{n+1}(x) < 0 \quad \text{אם} \quad P_n(x) = 0 \quad \text{אולי}$$

(3) הנכד

הרצאה.

המשק של משוואת נסיפה

ראינו בהרצאה הקודמת

$$x \hat{P}_n(x) = c_{n-1} \hat{P}_{n-1}(x) + c_n \hat{P}_n(x) + c_{n+1} \hat{P}_{n+1}(x)$$

$$(*) \quad c_{n+1} \hat{P}_{n+1}(x) = \hat{P}_n(x) (x - c_n) - c_{n-1} \hat{P}_{n-1}(x)$$

$$\hat{P}_n(x) = \mu_n x^n + \dots \quad \text{כאשר}$$

$$\mu_n > 0$$

נראה הקדמים ב"ן שני אופי משוואה (*).

$$x_{n+1} = 0 \quad c_{n+1} \mu_{n+1} = \mu_n$$

$$c_{n+1} = \frac{\mu_n}{\mu_{n+1}}$$

$$\left(\frac{\mu_n}{\mu_{n+1}} \right) \hat{P}_{n+1}(x) = \hat{P}_n(x) (x - c_n) - \left(\frac{\mu_{n-1}}{\mu_n} \right) \hat{P}_{n-1}(x) \quad \text{ונתקבל}$$

כאשר המקדמים c_n , הם מקדמי כר"ה, ומחושבים לפי

$$c_n = \frac{\int_a^b P_n(x) \cdot x \cdot \hat{P}_n(x) \hat{P}_n(x) dx}{\int_a^b P_n(x) \cdot x \cdot [\hat{P}_n(x)]^2 dx}$$

$$c_n = \frac{\int_a^b P_n(x) \cdot x \cdot [\hat{P}_n(x)]^2 dx}{\int_a^b P_n(x) \cdot x \cdot [\hat{P}_n(x)]^2 dx}$$

הסמון של פולינום מתוקן, צה"נו $\mu_n = 1$ הנו $\tilde{P}_n(x)$

$$\tilde{P}_n(x) = \frac{1}{\mu_n} \hat{P}_n(x) \Rightarrow \hat{P}_n(x) = \mu_n \tilde{P}_n(x)$$

נצ"ה את הוולנוס המתוקן במשטור

$$\mu_n \tilde{P}_{n+1}(x) = \mu_n \tilde{P}_n(x)(x - c_n) - \left(\frac{\mu_{n-1}}{\mu_n}\right) \tilde{P}_{n-1}(x)$$

הנסיגה

$$\tilde{P}_{n+1}(x) = \tilde{P}_n(x)(x - c_n) - \left(\frac{\mu_{n-1}}{\mu_n}\right)^2 \tilde{P}_{n-1}(x)$$

נצ"ה

$$\mu_n \triangleq \frac{\mu_{n-1}}{\mu_n}$$

$$\mu_n^2 > 0$$

אם פונקציה המתקן סימטרית בקטע סימטרי, צה"נו מתקיים

$$P(x) = P(-x), \quad x \in [a, a]$$

$$c_n = \int_{-a}^a P(x) \cdot x \cdot P_n^2(x) dx = 0$$

פונקציה אי-זוגית, עם קטע סימטרי ונקבל את משטור הנסיגה

$$\tilde{P}_{n+1}(x) = x \tilde{P}_n(x) - \mu_n^2 \tilde{P}_{n-1}(x)$$

הערה: בהתקיים ואז סימטרית בקטע סימטרי, אנו נל $\hat{P}_n$ פונקציה סימטרית.

הערה: יט סימונים מקובלים אחרים בספרות: $c_n \triangleq a_n$, $\mu_n \triangleq m_n$

תכונה: עבור כל פולינום בקטע סבי $[a, b]$ מתקיים $\forall |c_k| < C$

המקדמים מסומים ע"י הקדוש, כאשר $C = \max\{1, |a|, |b|\}$

הוכחת התכונה:

$$C_k = \int_a^b P(x) \cdot x \cdot P_n^2(x) dx$$

נשתמש באי-שוויון קוסי-זיגל

$$\left| \int_a^b u(x) v(x) dx \right|^2 \leq \|u\|^2 \cdot \|v\|^2$$

נציב כי $P(x)$ פונקציה חזקה.

$$\int_a^b p(x) \cdot x \cdot \hat{p}_n(x) \hat{p}_k(x) dx = \int_a^b \sqrt{p(x)} \cdot x \cdot \hat{p}_k(x) \sqrt{p(x)} \hat{p}_n(x) dx$$

נעשה טני אופסים הר'ב'ום?

$$\left| \int_a^b (\sqrt{p(x)} \cdot x \cdot \hat{p}_k(x)) (\sqrt{p(x)} \hat{p}_n(x)) dx \right|^2 \leq \int_a^b p(x) x^2 [\hat{p}_k(x)]^2 dx \cdot \int_a^b p(x) [\hat{p}_n(x)]^2 dx$$

$$x \in [a, b], \quad C \equiv \max\{|a|, |b|\} \quad (\text{הרצון})$$

$$x < C$$

ובכן

$$\leq C^2 \int_a^b p(x) [\hat{p}_k(x)]^2 dx \cdot \int_a^b p(x) [\hat{p}_n(x)]^2 dx$$

$$\uparrow \quad \uparrow \\ \|\hat{p}_k(x)\|^2 = 1 \quad \|\hat{p}_n(x)\|^2 = 1$$

$$C_k = \int_a^b p(x) \cdot x \cdot \hat{p}_k(x) \hat{p}_n(x) dx \leq C = \max\{|a|, |b|\}$$

ובכן נובע

ליתר ברור - כריס טאל

$$\sum_{k=0}^n \hat{p}_k(x) \hat{p}_k(t) = \lambda_n \left[\frac{\hat{p}_{n+1}(x) \hat{p}_n(t) - \hat{p}_{n+1}(t) \hat{p}_n(x)}{x-t} \right]$$

מתקיים

הוכחה: (מתחילת הנוסחה)

$$C_{n+1} = \lambda_n$$

$$\lambda_n \hat{p}_{n+1}(x) = (x - C_n) \hat{p}_n(x) - \lambda_{n-1} \hat{p}_{n-1}(x)$$

נכנסו טני אופסים ה- $\hat{p}_n(x)$, ונקבל

(*)

$$\lambda_n \hat{p}_n(t) \hat{p}_{n+1}(x) = (x - C_n) \hat{p}_n(x) \hat{p}_n(t) - \lambda_{n-1} \hat{p}_n(t) \hat{p}_{n-1}(x)$$

נחליש טיב זיכר (טני) וזה (*) אכן נכנסת בין x ו- t

$$\lambda_n \hat{p}_n(x) \hat{p}_{n+1}(t) = (t - C_n) \hat{p}_n(t) \hat{p}_n(x) - \lambda_{n-1} \hat{p}_n(x) \hat{p}_{n-1}(t)$$

נחסר בין טני (המשוואות), ונקבל

$$\lambda_n [\hat{p}_n(t) \hat{p}_{n+1}(x) - \hat{p}_n(x) \hat{p}_{n+1}(t)] = (x-t) \hat{p}_n(t) \hat{p}_n(x) + \lambda_{n-1} [\hat{p}_n(x) \hat{p}_{n-1}(t) - \hat{p}_n(t) \hat{p}_{n-1}(x)]$$

$$(x-t) \hat{p}_n(t) \hat{p}_n(x) = \lambda_n [\hat{p}_n(t) \hat{p}_{n+1}(x) - \hat{p}_n(x) \hat{p}_{n+1}(t)] + \lambda_{n-1} [\hat{p}_n(x) \hat{p}_{n-1}(t) - \hat{p}_n(t) \hat{p}_{n-1}(x)]$$

נעבנים אונז האנטווארע עס וו אפערירט, נעבן (x-t) אפני סוצייס

$$(x-t) \sum_{k=1}^n \hat{p}_k(x) \hat{p}_k(t) = \sum_{k=1}^n \left\{ \lambda_n \left[\hat{p}_{k+1}(x) \hat{p}_k(t) - \hat{p}_{k+1}(t) \hat{p}_k(x) \right] - \lambda_{n-1} \left[\hat{p}_k(x) \hat{p}_{k-1}(t) - \hat{p}_k(t) \hat{p}_{k-1}(x) \right] \right\}$$

$$\sum_{k=1}^n (a_k - a_{k-1}) = a_n - a_0 \quad \text{קעגנען באהאנדלען, טאג סעס קעגן}$$

$$(x-t) \sum_{k=1}^n \hat{p}_k(x) \hat{p}_k(t) = \lambda_n \left[\hat{p}_{n+1}(x) \hat{p}_n(t) - \hat{p}_{n+1}(t) \hat{p}_n(x) \right] - \lambda_0 \left[\hat{p}_1(x) \hat{p}_0(t) - \hat{p}_1(t) \hat{p}_0(x) \right]$$

$$(x-t) \left[\hat{p}_1(x) \hat{p}_0(t) - \hat{p}_1(t) \hat{p}_0(x) \right] \quad \text{נוסטיג לעבן אנדערע אונז הייטונג}$$

כאטש עס איז דא דאסעלבע ווי אונזערע

$$(x-t) \left[\hat{p}_1(x) \hat{p}_0(t) - \hat{p}_1(t) \hat{p}_0(x) \right] = \lambda_0 \left[\hat{p}_1(x) \hat{p}_0(t) - \hat{p}_1(t) \hat{p}_0(x) \right]$$

$$p_0(x) = p_0(t) = \mu_0$$

$$p_1(x) = \mu_1 + \alpha$$

$$p_1(t) = \mu_1 + \alpha$$

נצט אונז הייטונג, ווערען אונז געווען.

אונזער הייסטונג געווען לעבן אנדערע, נאכדעם אונז שני האנטעס געווען

ווערען אונז געווען צוויי - כריסטלעך.

$$\text{אונזערע הייטונג} \quad \sum_{k=0}^n \hat{p}_k(x) \hat{p}_k(t) \quad \text{אונזערע הייטונג אונז כריסטלעך}$$

אונזערע הייטונג אונז

$$\sum_{k=0}^n p_k(x)^2 = \lim_{t \rightarrow x} \lambda_n \left[\frac{\hat{p}_{n+1}(x) \hat{p}_n(t) - \hat{p}_{n+1}(t) \hat{p}_n(x)}{x-t} \right]$$

אונזערע הייטונג אונזערע הייטונג אונזערע הייטונג

אונזערע הייטונג אונזערע הייטונג אונזערע הייטונג

$$= \lim_{t \rightarrow x} \lambda_n \left[\frac{\hat{p}_{n+1}(x) \hat{p}_n(t) - \hat{p}_{n+1}(t) \hat{p}_n(x)}{x-t} \right]$$

כעת נציג $t=x$

$$\sum_{k=0}^{\infty} |P_k(x)|^2 = \lambda_n \left[P_{n+1}'(x) P_n(x) - P_{n+1}(x) P_n'(x) \right]$$

$$\sum_{k=0}^n |P_k(x)|^2 \geq 0 \quad \& \quad \lambda_n > 0$$

ועכ"פ

$$P_{n+1}'(x) P_n(x) - P_{n+1}(x) P_n'(x) \geq 0$$

נבדוק בנקודה a , בה נתקיים $\hat{P}_n(a) = 0$, ונקבל

$$-\hat{P}_{n+1}(a) \hat{P}_n'(a) > 0$$

$$\hat{P}_{n+1}(a) \hat{P}_n'(a) < 0 \quad \text{או סחיסופין}$$

תכונות אוקסיד של $P_n(x)$

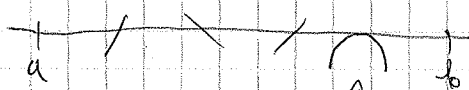
$P_n(x)$ כוללים את המערכת הפולינומית $\{P_n(x)\}$ עם הקטע $[a, b]$

או המסלול: כל האוקסידים m בקטע $[a, b]$ $P_n(a_m) = 0$ נמצאים בקטע $[a, b]$

כל האוקסידים נמצאים, ראשוניים (מסלול ריבועי / ריבועי) $(1-n)$

אנציות בתוך הקטע (a, b) (מסלול ריבועי).

הוכחה: נוכיח כי יש ח סינון סיון הקטע (a, b)



מלבד עם
ריבועי
עצום $n-1$

ניכית בצדק הטענה.

נניח כי לפולינום ההמשכה יש m סינונים, $m < n$.

נבנה את הפולינום הבא.

$$W(x) = (x-x_1)(x-x_2) \cdots (x-x_m) \quad (P_n' \text{ של } P_n)$$

אזי לביטוי $W(x) P_n(x)$ תמיד עם אותו סינון (חיוכי או שלילי)

אם הביטוי $W(x) P_n(x) W(x)$ תמיד עם אותו סינון.

$$\int (x-a)^n dx = \begin{cases} > 0 \text{ or } < 0 \\ \neq 0 \end{cases}$$

האינטגרל תמיד עם
אותו סימן

כי n שווה לכל כולל
מחלקה - קטנה

מסקנה אין סלילים ואם m מ אכסים של (a,b) כך $a < m$

נכון $m=a$. בהינתן a מ ארמים עם ריבוי 1 בנקד

וכל הארמים נמצאים בקטע (a,b) .