פתרון תרגיל 3

<u>שאלה 1</u>

א. n משתנים
ב. אין הגבלה על מספר המשוואות
ג. אינסוף

<u>שאלה 2</u>

כן. למשל למערכת בת משוואה אחת $0\cdot x_1+0\cdot x_2+0\cdot x_3=0$, כל שלָשה (x_1,x_2,x_3) מהווה פתרון.

<u>שאלה 3</u>

א. נתון ש- $c=(\gamma_1,\dots,\gamma_n)$ הוא פתרון של המערכת $\begin{cases}\alpha_{11}x_1+\dots+\alpha_{1n}x_n=0\\ \alpha_{21}x_1+\dots+\alpha_{2n}x_n=0\\ \vdots\\ \alpha_{m1}x_1+\dots+\alpha_{mn}x_n=0\end{cases}$, ולכן מתקיים $\begin{cases}\alpha_{11}\gamma_1+\dots+\alpha_{1n}\gamma_n=0\\ \alpha_{21}\gamma_1+\dots+\alpha_{2n}\gamma_n=0\\ \vdots\\ \alpha_{m1}\gamma_1+\dots+\alpha_{mn}\gamma_n=0\end{cases}$. נכפול את כל השוויונות בסקלר λ ונקבל: $\begin{cases}\alpha_{11}\cdot\lambda\gamma_1+\dots+\alpha_{1n}\cdot\lambda\gamma_n=0\\ \alpha_{21}\cdot\lambda\gamma_1+\dots+\alpha_{2n}\cdot\lambda\gamma_n=0\\ \vdots\\ \alpha_{m1}\cdot\lambda\gamma_1+\dots+\alpha_{mn}\cdot\lambda\gamma_n=0\end{cases}$. אולם פירושם של השיוויונות הללו הוא שה- n -יה $\lambda c=(\lambda\gamma_1,\dots,\lambda\gamma_n)$ פותרת את המערכת.

ב. יהיו $c=(\gamma_1,\dots,\gamma_n),d=(\delta_1,\dots,\delta_n)$ שני פתרונות של המערכת הנתונה ולכן מתקיימים השוויונות: $\begin{cases}\alpha_{11}\gamma_1+\dots+\alpha_{1n}\gamma_n=0\\ \alpha_{21}\gamma_1+\dots+\alpha_{2n}\gamma_n=0\\ \vdots\\ \alpha_{m1}\gamma_1+\dots+\alpha_{mn}\gamma_n=0\end{cases}$, $\begin{cases}\alpha_{11}\delta_1+\dots+\alpha_{1n}\delta_n=0\\ \alpha_{21}\delta_1+\dots+\alpha_{2n}\delta_n=0\\ \vdots\\ \alpha_{m1}\delta_1+\dots+\alpha_{mn}\delta_n=0\end{cases}$. נחבר את שתי המערכות ונקבל: $\begin{cases}\alpha_{11}(\delta_1+\gamma_1)+\dots+\alpha_{1n}(\delta_n+\gamma_n)=0\\ \alpha_{21}(\delta_1+\gamma_1)+\dots+\alpha_{2n}(\delta_n+\gamma_n)=0\\ \vdots\\ \alpha_{m1}(\delta_1+\gamma_1)+\dots+\alpha_{mn}(\delta_n+\gamma_n)=0\end{cases}$.

כלומר, ה- n -יה $c+d=(\gamma_1+\delta_1,\dots,\gamma_n+\delta_n)$ פותרת את המערכת.

ג. אם c,d הם פתרונות של המערכת אזי $\lambda_1 c,\lambda_2 d$ הם גם פתרונות על פי א'. אבל אז, על פי ב', גם $\lambda_1 c+\lambda_2 d$ הוא פתרון של המערכת.

ד. התכונות הללו הן נחלתן של המערכות ההומוגניות. על מנת להראות שאינן מתקיימות במערכות לא הומוגניות, מספיק להביא דוגמא נגדית:

$(1,4),(2,3)$ שניהם פתרונות של $x+y=5$ אבל $(1,4)+(2,3)=(3,7)$ אינו פתרון של המשוואה כי $3+7=10\neq 5$.

$(1,4)$ פתרון של $x+y=5$ כאמור אבל $2\cdot(1,4)=(2,8)$ אינו פתרון של משואה זו.

<u>שאלה 4</u>

א) נוכיח תחילה שקיימים $m,n\in\mathbb{N}$ כך ש $m<n$ ו $m\cdot 1_F=n\cdot 1_F$. אמנם, אחרת נקבל שהקבוצה $\{k\cdot 1_F \mid k\in\mathbb{N}\}$ אינסופית. אבל $\{k\cdot 1_F \mid k\in\mathbb{N}\}\subseteq F$ ו F סופית לכן גם $\{k\cdot 1_F \mid k\in\mathbb{N}\}$ סופית וקיבלנו סתירה. מכאן קיימים $m,n\in\mathbb{N}$ כך ש $m<n$ ו $m\cdot 1_F=n\cdot 1_F$. ניתן להסיק מכאן ש $(n-m)\cdot 1_F=0_F$ ברור ש $n-m\in\mathbb{N}$ ולכן $char(F)>0$.

ב) מכיון שהמאפיין אינו אפס מתקיים בהכרח $char(F)=p$ עובר איזשהו ראשוני p.
נראה שבקבוצה $A=\{k\cdot 1_F \mid k\in\mathbb{N}\cup\{0\}\}$ ($0\cdot 1_F:=0_F$) יש בדיוק p איברים.

יהי $k\in\mathbb{N}$ אזי ניתן לחלק את k ב p ולקבל שארית בין 0 ל $p-1$.

כלומר קיימים $t,m\in\mathbb{N}$ ו $0\leq r\leq p-1$ כך ש $k=mp+r$. קל לראות ש $k\cdot 1_F=r\cdot 1_F$ (זכרו ש $char(F)=p$) לכן $A=\{k\cdot 1_F \mid 0\leq k\leq p-1\}$.

בהכרח אם $0\leq k\neq s\leq p-1$ נקבל ש $k\cdot 1_F\neq s\cdot 1_F$ (למה? רמז: נקבל סתירה להגדרת המאפיין כטבעי המינימלי כך ש...) .

לכן ב $A=\{k\cdot 1_F \mid 0\leq k\leq p-1\}$ יש בדיוק p איברים שונים. מתקיים:

1) $1_F\in A\subseteq F$

2) אם $k\cdot 1_F, s\cdot 1_F \in A$ כך ש $s\cdot 1_F \neq 0_F$ אזי $-(s\cdot 1_F)=(p-s)\cdot 1_F$ ומתקיים

$k\cdot 1_F - s\cdot 1_F = (k+p-s)\cdot 1_F \in A$.

כמו כן מכיון ש $s\cdot 1_F \neq 0_F$ אז קיים $1\le m\le p-1$ כך ש $(m\cdot 1_F)\cdot(s\cdot 1_F)=1_F$.

הסבר: דומה לחלוטין להוכחת הופכי בשדה $\mathbb{Z}_p$ (הסתכלו בהרצאה). מכיון שהקבוצה A סגורה לכפל אז אם לא קיים $1\le m\le p-1$ כך ש $(m\cdot 1_F)\cdot(s\cdot 1_F)=1_F$ נקבל עפ"י עקרון שובך היונים שקיימים $1\le m\neq t\le p-1$ כך ש $(m\cdot 1_F)\cdot(s\cdot 1_F)=(t\cdot 1_F)\cdot(s\cdot 1_F)$. זה לא אפשרי (למה?) ולכן בהכרח קיים $1\le m\le p-1$ כך ש $(m\cdot 1_F)\cdot(s\cdot 1_F)=1_F$ כלומר $(s\cdot 1_F)^{-1}=m\cdot 1_F$ ומכאן $(k\cdot 1_F)(s\cdot 1_F)^{-1}=(km)\cdot 1_F \in A$.

עפ"י הקריטריון של תת שדה נסיק ש A תת שדה של F.

הערה: לכל $0\le m,s\le p-1$ מתקיים
$$m\cdot 1_F + s\cdot 1_F = ((m+s)\bmod p)\cdot 1_F$$
$$(m\cdot 1_F)\cdot(s\cdot 1_F)=(ms\bmod p)\cdot 1_F$$

(בדקוו) לכן במובן מסויים A היא "עותק" של $\mathbb{Z}_p$.

<u>תרגיל 1.6 ב</u>

$$\begin{cases}2x+4y+6z=8\\3x+6y+10z=4\\4x+8y+2z=9\end{cases}$$
אם נצמצם את המשוואה הראשונה ב-2 (למה זה מותר?) נקבל

$$\begin{cases}x+2y+3z=4\\3x+6y+10z=4\\4x+8y+2z=9\end{cases}$$
נבצע את הפעולות הבאות : $\begin{matrix}R_2-3R_1\to R_2\\R_3-4R_1\to R_3\end{matrix}$ ונקבל את המערכת

$$\begin{cases} x+2y+3z=4 \\ 0x+0y+z=-8 \\ 0x+0y+-10z=-7 \end{cases}$$ קל לראות שלמערכת אין פתרון מעל $\mathbb{Z}$.

(אגב, למערכת גם אין פתרון מעל הממשיים).

<u>תרגיל 1.7</u>

למערכת $x+y+z=0$ מעל $\mathbb{Z}_7$ יש בדיוק 49 פתרונות שונים.

(מדוע?)

<u>תרגיל 1.8</u>

ג.

$$\begin{cases} x_1+(a-1)x_2-x_3=4 \\ ax_1+(a-1)x_2-x_3=a+3 \\ x_1+(a-1)x_2+(a-3)x_3=7 \end{cases} \xrightarrow[R_3-R_1\to R_3]{R_2-aR_1\to R_2} \begin{cases} x_1+(a-1)x_2-x_3=4 \\ 0x_1+\left(1-a\right)(a-1)x_2+(a-1)x_3=-3(a-1) \\ 0x_1+0x_2+(a-2)x_3=3 \end{cases}$$

פתרון יחיד: $a\neq 1,2$.

אין פתרון: כש $a=2$ נקבל מהמשוואה השלישית סתירה ($x_1+0x_2+0x_3=3$) ולכן במצב זה אין פתרון.

אינסוף פתרונות: $a=1$ נקבל מערכת $\begin{cases} x_1+0x_2-x_3=4 \\ 0x_1+0x_2+0x_3=0 \\ 0x_1+0x_2+-x_3=3 \end{cases}$ או אם נחליף את השורות השנייה והשלישית לקבלת צורה מדורגת $\begin{cases} x_1+0x_2-x_3=4 \\ 0x_1+0x_2+-x_3=3 \\ 0x_1+0x_2+0x_3=0 \end{cases}$ וברור שישנם אינסוף פתרונות. המשתנה החופשי הוא x_2 כי x_1 ו- x_3 משתנים מובילים (בצורה המדורגת הם המשתנים הראשונים בשורות הראשונה והשנייה כך שהמקדמים שלהם אינם אפסים) אם נציב $x_2=t$ נקבל שאוסף הפתרונות הוא מהצורה $\left\{\left(1,t,-3\right)\mid t\in R\right\}$.