תרגיל בית 12 – טופולוגיה

שאלה 1

א. יהי X מ"ט דיסקרטי עם בסיס B. הוכיחו שלכל $x \in X$ מתקיים $\{x\} \in B$.

ב. יהי X מ"ט עם בסיס B, Y קבוצה ו- $f : X \to Y$ פונקציה **על**. הוכיחו/הפריכו:
$B' = \{O \subseteq Y : f^{-1}(O) \in B\}$ בסיס לטופולוגיית המנה על Y.

ג. יהי $\mathbb{R}_l$ הישר של סורגנפריי ותהי $f : \mathbb{R}_l \to \mathbb{Z}$ פונקציית הערך השלם. מצאו את טופולוגיית המנה τ על $\mathbb{Z}$ ביחס ל- f.

שאלה 2

נתבונן ב- $\mathbb{R}$ עם הטופולוגיה הסטנדרטית ובפונקצית הערך השלם $f : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$. נסמן ב- τ את טופולוגיית המנה על $\mathbb{Z}$ ביחס ל- f.

א. הוכיחו שמתקיים $A \in \tau \Leftrightarrow$ אם $n \in A$ אז $n-1 \in A$.

ב. הסיקו כי $\tau = \{\varnothing, \mathbb{Z}\} \cup \{(-\infty, M] \cap \mathbb{Z} : M \in \mathbb{Z}\}$.

שאלה 3

א. יהיו X,Y מ"ט, $f : X \to Y, g : Y \to X$ רציפות ומתקיים $f \circ g = id_Y$. הוכיחו כי f העתקת מנה.

ב. תהי $f : X \to Y$ העתקת מנה. הוכיחו כי f הומיאומורפיזם $\Leftrightarrow$ f חח"ע.

שאלה 4

א. נגדיר יחס שקילות על $\mathbb{R}^2$: $x_1+y_1{}^2=x_2+y_2{}^2 \iff (x_1,y_1)\sim(x_2,y_2)$. הוכיחו כי $\mathbb{R}^2/\sim$ הומיאומורפי ל- $\mathbb{R}$.

רמז: מצאו את ההעתקה ההפוכה ל - $\hat{f}$ מ- $\mathbb{R}$ ל - $\mathbb{R}^2/\sim$.

ב. נגדיר יחס שקילות על $\mathbb{R}^2$: $x_1{}^2+y_1{}^2=x_2{}^2+y_2{}^2 \iff (x_1,y_1)\sim(x_2,y_2)$. לְמה הומיאומורפי $\mathbb{R}^2/\sim$?

שאלה 5

יהי X מרחב המנה של $\mathbb{R}$ המתקבל מיחס השקילות הבא:

$x\sim y \iff (x=y)\vee(x=-y)$. הראו ש- X הומיאומורפי ל- $[0,\infty)$.

שאלה 6

יהי X מרחב המנה של $\mathbb{R}$ המתקבל על-ידי זה שמזהים זו לזו את כל הנקודות $x\in\mathbb{R}$ כך ש- $|x|\geq 1$. בלשון אחרת, X הוא מרחב המנה $\mathbb{R}/\sim$ כאשר $\sim$ הוא יחס שקילות המוגדר באופן הבא: $x\sim y$ אם ורק אם $x=y$ או $|x|\geq 1$ וגם $|y|\geq 1$. הראו ש- X הומיאומורפי למעגל $S^1=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2=1\}$.

שאלה 7

מצאו דוגמה להעתקת מנה שאינה פתוחה ואינה סגורה.

בהצלחה!