05/12/13 ב׳ טבת תשע״ד בס״ד

אלגברה 3 - הרצאה מס׳ 8.

אם K/F הרחבת גלואה אז יש התאמה הופכת סדר, חח״ע ועל.

תת חבורות של $G=Gal(K/F)$ $\longleftrightarrow$ שדות ביניים

$$L \longmapsto Gal(K/F)$$

$$K^H \longleftarrow H$$

<u>מסקנה:</u> לכל הרחבת גלואה ממימד סופי יש <u>מספר סופי</u> של שדות ביניים.

נמשיך לחשב את הדוגמה מהשיעור הקודם:

K שדה פיצול של $f(x)=x^4-7$, $\alpha = 7^{\frac{1}{4}}$

$\mathbb{Q}$

שורשי הפולינום: $\alpha, i\alpha, -\alpha, -i\alpha \Leftarrow$

$$K = \mathbb{Q}[\alpha, i\alpha, -\alpha, -i\alpha] = \mathbb{Q}[\alpha, i]$$

$$Gal(K/F) \hookrightarrow S_4 \qquad [K:\mathbb{Q}] = 8 \longrightarrow |Gal(K/F)| = 8$$

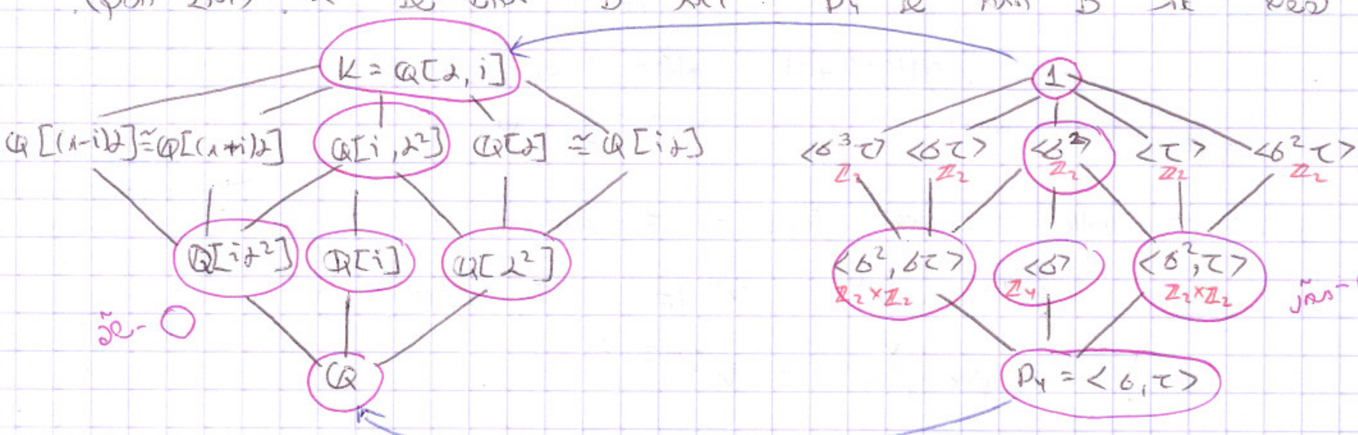
נגדיר אוטו׳:

$\sigma: \alpha \longmapsto i\alpha,\ i \longmapsto i$ $\qquad$ $\tau: \alpha \longmapsto \alpha,\ i \longmapsto -i$

$\sigma^4 = 1, \quad \tau^2 = 1, \quad \sigma\tau = \tau\sigma^{-1}$ $\qquad$ $\sigma^a\tau^b$: $\alpha \longmapsto i^a\alpha$, $i \longmapsto (-1)^b i$

$\Rightarrow \underset{8}{\langle \sigma, \tau \rangle} \xleftarrow{\text{איזו}} \underset{8}{D_4}$

נמצא את כל התת׳ של D_4 ואת כל תת״ש של K (דורש הסבר).



$\sigma^2: \alpha \mapsto -\alpha,\ i \mapsto i$

$\sigma^2\tau: \alpha \mapsto -\alpha,\ i \mapsto -i$

$\sigma\tau: \alpha \mapsto i\alpha,\ i \mapsto -i$

$\Downarrow$

$\sigma\tau: \alpha \longleftrightarrow i\alpha$

$\beta = (1+i)\alpha$

$\beta^2 = 2i\alpha^2$

$\beta^4 = -4\alpha^4 = -28$

$x^4 + 28 = 0$

משפט: תהי K/F הרחבה גלואה, עם $G = Gal(K/F)$.

יהי $F \leq L \leq K$ תת-שדה.

$H = Gal(K/L)$ נורמלית ב-G $\Leftrightarrow$ ההרחבה L/F נורמלית.

הוכחה: נתחיל מהחישוב הבא:

יהי $g \in G$. ידוע ש-$K^H = L$.

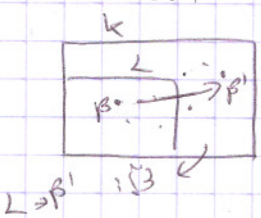
$$K^{gHg^{-1}} = \{x \mid \forall \sigma \in H: g\sigma g^{-1}(x) = x\} =$$

$$= \{g(y) \mid \forall \sigma \in H: g\sigma \cancel{g^{-1}} \cancel{g} y = gy\} = \{g(y) : y \in K^H\} =$$

$$= g(K^H)$$

$\boxed{\Leftarrow}$ כעת נניח $H \triangleleft G$. יהי $h(x)$ פולינום אי-פריק מעל F שיש לו שורש β ב-L (צ"ל: כל שורשיו ב-L).

השורש הזה ב-$K \supseteq L$ שהוא נורמלי מעל F ולכן הפולינום מתפצל ב-K.



יהי β' שורש של h, לכן $\beta' \in K$. (צ"ל: $\beta' \in L$)

לפי המשפט על $n^{K}_{F(\beta)} \hookrightarrow K$, יש $g \in G$ כך

ש- $g(\beta) = \beta'$ $\Rightarrow$ $L = K^H = K^{gHg^{-1}} = g(K^H)$

$H \triangleleft G$ החישוב מקודם

$\boxed{\Rightarrow}$ בכיוון ההפוך, נניח K^H/F נורמלי.

יהי $g \in G$. נניח בשלילה $gHg^{-1} \neq H$.

אז $K^{gHg^{-1}} \neq K^H$ ולכן יש $\beta \in K^H \setminus K^{gHg^{-1}}$, ל-$\beta$

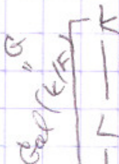
המשפט היסודי → יש פול' מינימלי מעל F ו-$g^{-1}(\beta)$ שורש של אותו פולינום,

ולפי הנורמליות של K^H/F, $g^{-1}(\beta) \in K^H$

$$\Downarrow$$

$\beta \in g(K^H) = K^{gHg^{-1}}$, סתירה!

טענה: תהי K/F הרחבה גלואה.



יהי $F \leq \underline{L} \leq K$ שדה ביניים נורמלי מעל F. ($\Leftarrow L/F$ גלואה). $Gal(K/L) \leq G$.

כמו כן $H = Gal(K/L) \triangleleft Gal(K/F)$

05/12/13 הרצאה 5 תורת השדות

<u>הוכחה:</u> נגדיר $\varphi : Gal(K/F) \longrightarrow Gal(L/F)$ ע״י

$$\varphi(\sigma) = \sigma|_L \in Gal(L/F)$$

(הוכחנו שבגלל הנורמליות $\sigma(L) = \sigma(K^H) = K^{\sigma H \sigma^{-1}} = K^H = L$).

$$\ker\varphi = \{\sigma \in G \mid \sigma|_L = 1\} = Gal(K/L) \Longrightarrow$$

$$G/H \cong Im\varphi \leq Gal(L/F)$$

אבל $|Im\varphi| = |G|/|H| = [L:F]$ ומכוון $[L:F] = Gal(L/F)$

לכן φ על.

סוף תרגול...

<u>מסקנה:</u> K/F הרחבת גלואה.

$H \leq Gal(K/F) = G$. איך מחשבים K^H?

נגדיר את הנורמה והעקבה של K מעל F:

$$N_{K/F}(x) = \prod_{\sigma \in G} \sigma(x)$$

$$T_{K/F}(x) = \sum_{\sigma \in G} \sigma(x)$$

אלו פונקציות מ- $K \longrightarrow F$ כי

$$\sigma_0\left(\sum \sigma(x)\right) = \sum_{\sigma \in G} \sigma_0 \sigma(x) = \sum_{\sigma' \in G} \sigma'(x)$$

$$\Leftarrow \quad T(x), N(x) \in K^G = F$$

וברור ש-

$$N(xy) = N(x)N(y)$$

$$T(x+y) = T(x) + T(y)$$

בדיוק באותו אופן, $T_{K/K^H}(x) = \sum_{\sigma \in H} \sigma(x)$ היא פונקציה אדיטיבית $K \longrightarrow K^H = L$.

$$\forall \alpha \in L, \ \forall x \in K$$

$$T_{K/K^H}(\alpha x) = \sum \sigma(\alpha x) = \sum \alpha \cdot \sigma(x) = \alpha \cdot T_{K/K^H}(x)$$

כלומר $T_{K/L} : K \longrightarrow L$ היא הומ׳ של מ״ו מעל L.

אם $T_{K/K}=0$, בהוכחה , קל $\sum_{\sigma\in H}\sigma = 0$, אומר הלכסון שהאופן קת

מעשה אוטומורפיזמים.

מסקנה: לכל הרחבת גלואה K/F, ולכל $H \le Gal(K/F)$,

$$K^H = T_{K/K^H}(K)$$

הערה: נניח ש־$\alpha \in K$ שורש של הפולינום המינימלי של $\forall \alpha\in K$ לומר (דבר שהוא ספרותי)

$$K = F[\{\sigma(\alpha)\}_{\sigma\in G}]$$

$$f(\lambda) = \prod_{\sigma\in G}(\lambda-\sigma(\alpha)) =$$

$$= \lambda^n - \underbrace{\left(\sum\sigma(\alpha)\right)}_{T(\alpha)}\lambda^{n-1} + \dots \pm \underbrace{\prod\sigma(\alpha)}_{N(\alpha)}$$

הגדרה: הרחבה גלואה עם חבורה ציקלית נקראת הרחבה ציקלית.

תרגיל: תהי K/F הרחבה ציקלית עם $Gal(K/F)=\langle\sigma\rangle$
(ממעלה n) , $\sigma^n=1$

$$T_{K/F}(\alpha) = \sum_{i=0}^{n-1}\sigma^i(x)$$

אם $y=x-\sigma(x)$, הראו ש- $T_{K/F}(y)=0$:

$$T(x-\sigma(x)) = \sum\sigma^i(x)-\sum\sigma^{i+1}(x) = 0$$

הראו שאם $T(y)=0$ אז קיים x כך ש- $y=x-\sigma(x)$.

פתרון: נבחון האנדומורפיזם

$(n-1) \to K \xrightarrow{T} F$

$F \to K \xrightarrow{1-\sigma} K$ $(n-1)$

$$1-\sigma : K \to K$$

$$Im(1-\sigma) \subseteq \ker T$$

$$\ker(1-\sigma) = K^\sigma = K^{\langle\sigma\rangle} = K^G = F$$

$$\Rightarrow \dim Im(1-\sigma) = \dim K - \dim\ker(1-\sigma) = n-1$$

לכן $\dim Im(1-\sigma) = \dim\ker T$ (מעל F) ומכאן שוויון.

תרגיל: חשב של סוג רציונליות מ- x,y שהן סימטריות להחלפה $x\leftrightarrow y$ הינן

מעשה פונ' רציונליות של $x+y$, xy.

$$f(x,y) = \frac{p(x,y)}{q(x,y)}$$

$=$

תשובה: נתבונן בשדה $K = F(x,y) =$

$$= \left\{ \frac{p(x,y)}{q(x,y)} \;\middle|\; p,q \in F[\lambda,\mu] \right\}$$

נגדיר על K אוטומורפיזם לפי $\tau : x \longleftrightarrow y$

שמתקיים שעתה:

$$F(x,y)^\tau = F(x+y,\, xy)$$

$$\begin{array}{l} F(x,y) \\ \;\;\big|\, 2 \\ F(x,y)^\tau \\ \;\;\big| \\ F(x+y,\, xy) \end{array} \quad 2?$$

ברור ש- $F(x,y)^\tau \supseteq F(x+y,\, xy)$

$\tau \in Gal(K/F)$

וברור ש- $\tau^2 = 1$.

לכן $[F(x,y) : F(x,y)^\tau] = 2$

ברור ש- $F(x+y,\, xy)[x] = F(x,y)$

$$(\lambda - x)(\lambda - y) = \lambda^2 - (x+y)\lambda + xy$$

הפולינום של x מעל השדה

$\Leftarrow$ $[F(x,y) : F(x+y,\, xy)] \le 2$

לכן המימד $= 2$ והשדות שווים: $F(x,y)^\tau = F(x+y,\, xy)$.