דף תרגילים 1

1. <u>עדכנתי את התרגיל לכתיב שמתאים יותר לדף בה אני לימדתי בתרגול</u> חקרו את המשוואות הבאות:

א. הצג את התבנית הריבועית שבמשוואות באמצעות מטריצה A. ומצא אם התבנית מייצגת אליפסה (או אחד ממקרי הקצה מתאימים), פרבולה או היפרבולה.
ב. אם מדובר בפרבולה או היפרבולה, מצא את מרכז והפרמטר r.
ג. מצא את הערכים העצמיים של A, ווקטורים עצמיים באורך 1 לכל ערך עצמי.
ד. לאליפסה והיפרבולה, השתמש בהחלפת משתנים והפוך את התבנית הריבועית לתבנית ריבועית סטנדרטית (כלומר ללא מחוברים עם הביטויים x, y או xy)
במקרה של פרבולה הצג כמשוואת פרבולה סטנדרטית, $y = ax^2 + bx + c$.
ה. במקרה של אליפסה מצא, את אורך הרדיוסים (הארוך והקצר) ואת הזווית של אחד הרדיוסים עם הצד החיובי של ציר ה- x.
במקרה של היפרבולה, מצא את האסימפטוטות שלה ואת הקודקודים (הנקודות על ההיפרבולה שהכי קרובות שלמרכז).
במקרה של פרבולה, מצא את הקודקוד שלה, את כיוון ההתקדמות שלה.
ו. שרטט גרף של המשוואה ב- $\mathbb{R}^2$.

I. $3x^2 - 7y^2 + 5 = 0$

א. התבנית היא $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -7 \end{pmatrix}$, הדטרמיננטה שלה שלילית ולכן זו היפרבולה (או מקרה קצה מתאים).
ב. אין מונומים ליניארים (dx, ey) במשוואה, ולכן המרכז הוא $(0,0)$. $3x^2 - 7y^2 = -5$ ולכן $r = -5$. אם משהו כפיל את המשוואה ב- -1 ויקבל $7y^2 - 3x^2 = 5$ וירשום $r = 5$ זה גם יתקבל.
ג. ע"ע 3 ו- -7, הוקטורים עצמיים $v_3 = (1,0)$ ו- $v_{-7} = (0,1)$ הם באורך 1.
ד. התבנית כבר סטנדרטית.
ה. האסימפטוטות של ההיפרבולה נתונות ע"י המשוואה $3x^2 - 7y^2 = 0$ (משוואת ההיפרבולה לאחר שהחלפנו את r ב-0), ז"א $(\sqrt{3}x + \sqrt{7}y)(\sqrt{3}x - \sqrt{7}y) = 0$ וזה שקול ל- $y = \pm\sqrt{\frac{3}{7}}$.
הקודקודים הם נקודות על ההיפרבולה שהן וקטור עצמי של אחד הערכים העצמיים. וקטור עצמי של 3 יהיה מהצורה $(a, 0)$ ו- $\begin{pmatrix} a & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} = 3a^2 \geq 0$ ובפרט זה לא שווה -5, ולכן מדובר בוקטורים עצמיים של -7, מהצורה $(0, a)$ ו- $\begin{pmatrix} 0 & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ a \end{pmatrix} = -7a^2 = -5$ אומר ש- $a = \pm\sqrt{\frac{5}{7}}$ - הקודקודים הם $\left(0, \pm\sqrt{\frac{5}{7}}\right)$.
ו. זו סתם היפרבולה קנונית, איור:

II. $5x^2 + 2x - 3 - 2y = 0$

א. התבנית היא $\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, הדטרמיננטה שלה 0 ולכן זו פרבולה (או מקרה קצה מתאים).
ב. לא רלוונטי.
ג. ע"ע 5 ו- 0, הוקטורים עצמיים $v_5 = (1,0)$ ו- $v_0 = (0,1)$ הם באורך 1.
ד. התבנית כבר סטנדרטית.

ה. זו הפרבולה $y = \frac{5}{2}x^2 + x - \frac{3}{2}$. $y' = 5x + 1$, $y' = 0$ אם ורק אם $x = -\frac{1}{5}$, ואז $y =$ $-\frac{8}{5} = \frac{1}{10} - \frac{1}{5} - \frac{3}{2} = \frac{5}{2}\left(-\frac{1}{5}\right)^2 + \left(-\frac{1}{5}\right) - \frac{3}{2}$. אז הקודקוד הוא $\left(-\frac{1}{5}, -\frac{8}{5}\right)$. כיוון ההתקדמות הוא למעלה כי זו פרבולה מחייכת.

ו. איור:

III. $3x^2 - 4xy + 6y^2 - 14x + 28y + 30 = 0$

א. התבנית היא $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}$, הדטרמיננטה שלה חיובית ולכן זו אליפסה (או מקרה קצה מתאים).

ב. נמצא את המרכז לפי הנוסחא.

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}A^{-1}\begin{pmatrix} d \\ e \end{pmatrix} = \frac{-1}{2 \cdot 14}\begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -14 \\ 28 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3.5 \\ 14 \end{pmatrix}$$

נציב $x = x' + x_0 = x' - 3.5, y = y' + y_0 = y' + 14$ במשוואה ונקבל צורה קנונית.

$3x'^2 - 4x'y' + 6y'^2 = -1784$ (ולכן $r = -1784$)

ג. פולינום אופייני $\det\begin{pmatrix} \lambda - 3 & 2 \\ 2 & \lambda - 6 \end{pmatrix} = \lambda^2 - 9\lambda + 14 = (\lambda - 2)(\lambda - 7)$. ע"ע 7 ו- 2.

וקטורים עצמיים $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x - 2y \\ 6y - 2x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7x \\ 7y \end{pmatrix}$ גורר $y = -2x$. $(1, -2)$ הוא וקטור עצמי של 7, ננרמל אותו ל- $v_7 = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$ ולוקטור עצמי של 2 נסובב אותו ב- $90°$ ונקבל $v_2 = \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$.

ד. המקדמים של המונומים הם הע"ע ונשאר אותו r - $7\tilde{x}^2 + 2\tilde{y}^2 = -1784$.

ה. זו "אליפסה" אם רדיוס $r = -1784$ שלילי, אין למשוואה פתרון, היא מגדירה קבוצה ריקה.

ו. אין צורך באיור, זו קבוצה ריקה.

IV. $x^2 + 5xy + y^2 + 10x + 4y + 7 = 0$

א. התבנית היא $A = \begin{pmatrix} 1 & 2.5 \\ 2.5 & 1 \end{pmatrix}$, הדטרמיננטה שלה שלילית ולכן זו היפרבולה (או מקרה קצה מתאים).

ב. נמצא את המרכז לפי הנוסחא.

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}A^{-1}\begin{pmatrix} d \\ e \end{pmatrix} = \frac{-1}{2 \cdot (-5.25)}\begin{pmatrix} 1 & -2.5 \\ -2.5 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 10 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \end{pmatrix}$$

נציב $x = x' + x_0 = x', y = y' + y_0 = y' - 4$ במשוואה ונקבל צורה קנונית.

$x'^2 + 5x'y' + y'^2 = -7$. בהיפרבולה עדיף להכפיל את המשוואה ב- -1 כדי לקבל r חיובי. אז הצורה הקנונית העדיפה היא $-x'^2 - 5x'y' - y'^2 = 7$, ו- $r = 7$.

ג. עכשיו $A = \begin{pmatrix} -1 & -2.5 \\ -2.5 & -1 \end{pmatrix}$ בגלל שהכפלנו ב- -1.

פולינום אופייני $\det\begin{pmatrix} \lambda + 1 & 2.5 \\ 2.5 & \lambda + 1 \end{pmatrix} = \lambda^2 + 2\lambda - 5.25 = (\lambda - 1.5)(\lambda + 3.5)$. ע"ע 1.5 ו- -3.5. וקטורים עצמיים $\begin{pmatrix} -1 & 2.5 \\ 2.5 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.5y - x \\ 2.5x - y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.5x \\ 1.5y \end{pmatrix}$ גורר $y = x$. $(1,1)$ הוא וקטור עצמי של 1.5, ננרמל אותו ל- $v_{1.5} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ ולוקטור עצמי של 2 נסובב אותו ב- $90°$ ונקבל $v_{-3.5} = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

ד. המקדמים של המונומים הם הע"ע ונשאר אותו r - $1.5\tilde{x}^2 - 3.5\tilde{y}^2 = 7$.

ה. זו היפרבולה עם ע"ע חיובי $\lambda_1 = 1.5$. הקודקודים שלה יהיו $\pm\sqrt{\frac{r}{1.5}}v_{1.5} = \pm\left(\sqrt{\frac{21}{40}}, \sqrt{\frac{21}{40}}\right)$

בשביל למצוא את האסימפטוטות ניקח את המשוואה $-x'^2 - 5x'y' - y'^2 = 7$ ונחליף את $r = 7$ ב-0. נקבל $x'^2 + 5x'y' + y'^2 = 0$. אם נחלק נחלק ב- x'^2:

$$0 = \left(\frac{y'}{x'}\right)^2 + 5\frac{y'}{x'} + 1 = \left(\frac{y'}{x'} - \frac{-5+\sqrt{21}}{2}\right)\left(\frac{y'}{x'} - \frac{-5-\sqrt{21}}{2}\right)$$

ואם נכפיל שוב ב- x'^2 נקבל

$$0 = \left(y' + \frac{5-\sqrt{21}}{2}x'\right)\left(y' + \frac{5+\sqrt{21}}{2}x'\right)$$
$$= \left(y + 4 + \frac{5-\sqrt{21}}{2}x\right)\left(y + 4 + \frac{5+\sqrt{21}}{2}x\right)$$

וזה איחוד שתי האסימפטוטות. בנפרד האסימפטוטות הנן הישרים $y = -\frac{5\pm\sqrt{21}}{2}x + 4$.

ו. תאיירו את האסימפטוטות, את הקודקודים, ואז את ההיפרבולה"

V. $x^2 - 6xy + 9y^2 + 2x + y - 5 = 0$

א. התבנית היא $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 9 \end{pmatrix}$, הדטרמיננטה שלה אפס ולכן זו פרבולה (או מקרה קצה מתאים).

ב. לא רלוונטי

ג. פולינום אופייני $\det\begin{pmatrix} \lambda-1 & 3 \\ 3 & \lambda-9 \end{pmatrix} = \lambda^2 - 10\lambda = (\lambda-10)\lambda$. ע"ע 10 ו- 0. וקטורים עצמיים $\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-3y \\ -3x+9y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10x \\ 10y \end{pmatrix}$ גורר $y = -3x$. $(1,-3)$ הוא וקטור עצמי של 10, ננרמל אותו ל- $v_{10} = \left(\frac{1}{\sqrt{10}}, \frac{-3}{\sqrt{10}}\right)$ ולוקטור עצמי של 0 נסובב אותו ב- $90°$ ונקבל $v_0 = \left(\frac{3}{\sqrt{10}}, \frac{1}{\sqrt{10}}\right)$.

ד. במקרה של פרבולה חייבים לחשב. גילינו ש- $(x,y) = \tilde{x}\left(\frac{1}{\sqrt{10}}, \frac{-3}{\sqrt{10}}\right) + \tilde{y}\left(\frac{3}{\sqrt{10}}, \frac{1}{\sqrt{10}}\right)$

הערה: כזכור, במקרה של פרבולה $\tilde{y}$ יהיה המקדם של v_0 ו- $\tilde{x}$ של האחר.

ז"א $x = \frac{1}{\sqrt{10}}\tilde{x} + \frac{3}{\sqrt{10}}\tilde{y}$ ו- $y = \frac{-3}{\sqrt{10}}\tilde{x} + \frac{1}{\sqrt{10}}\tilde{y}$. נציב זאת במשוואה:

$$0 = x^2 - 6xy + 9y^2 + 2x + y - 5 = \left(\frac{1}{\sqrt{10}}\tilde{x} + \frac{3}{\sqrt{10}}\tilde{y}\right)^2$$
$$- 6\left(\frac{1}{\sqrt{10}}\tilde{x} + \frac{3}{\sqrt{10}}\tilde{y}\right)\left(\frac{-3}{\sqrt{10}}\tilde{x} + \frac{1}{\sqrt{10}}\tilde{y}\right) + 9\left(\frac{-3}{\sqrt{10}}\tilde{x} + \frac{1}{\sqrt{10}}\tilde{y}\right)^2$$
$$+ 2\left(\frac{1}{\sqrt{10}}\tilde{x} + \frac{3}{\sqrt{10}}\tilde{y}\right) + \left(\frac{-3}{\sqrt{10}}\tilde{x} + \frac{1}{\sqrt{10}}\tilde{y}\right) - 5$$
$$= \frac{7}{\sqrt{10}}\tilde{y} - \frac{62}{10}\tilde{x}^2 - \frac{1}{\sqrt{10}}\tilde{x} - 5$$

ולכן $\tilde{y} = \frac{62}{70}\sqrt{10}\tilde{x}^2 + \frac{1}{7}\tilde{x} + \frac{5}{7}\sqrt{10}$.

ה. וכדי למצוא את הקודקוד במשתנים $\tilde{x}$ ו- $\tilde{y}$ נגזור: $0 = \tilde{y}' = \frac{62}{35}\sqrt{10}\tilde{x} + \frac{1}{7}$ כאשר $\tilde{x} = -\frac{5}{62}\sqrt{10}$ ואז $\tilde{y} = \frac{25\cdot 10}{70\cdot 62}\sqrt{10} - \frac{5}{7\cdot 62}\sqrt{10} + \frac{5}{7}\sqrt{10} = \frac{25-5+5\cdot 62}{7\cdot 62}\sqrt{10} = \frac{330}{7\cdot 2\cdot 31}\sqrt{10} = \frac{165}{217}\sqrt{10}$

ולכן $\left(-\frac{5}{62}\sqrt{10},\frac{165}{217}\sqrt{10}\right) = (\tilde{x},\tilde{y})$ הוא הקודקוד. במשתנים המקוריים

$$(x,y)=\tilde{x}\left(\frac{1}{\sqrt{10}},\frac{-3}{\sqrt{10}}\right)+\tilde{y}\left(\frac{3}{\sqrt{10}},\frac{1}{\sqrt{10}}\right)=\frac{5}{62}(-1,3)+\frac{165}{217}(3,1)$$
$$=\frac{35}{434}(-1,3)+\frac{330}{434}(3,1)=\left(\frac{955}{434},\frac{435}{434}\right)\sim(2.2,1)$$

במשתנים $\tilde{x}$ ו- $\tilde{y}$ כיוון ההתקדמות הוא למעלה (פרבולה מחייכת). ז"א ש- $\tilde{y}$ עולה.

$\begin{pmatrix}\tilde{x}\\ \tilde{y}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{10}} & \frac{3}{\sqrt{10}}\\ \frac{-3}{\sqrt{10}} & \frac{1}{\sqrt{10}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$ ולכן $\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{10}} & \frac{-3}{\sqrt{10}}\\ \frac{3}{\sqrt{10}} & \frac{1}{\sqrt{10}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\tilde{x}\\ \tilde{y}\end{pmatrix}$ ובפרט $\tilde{y}=\frac{-3}{\sqrt{10}}x+\frac{1}{\sqrt{10}}y$ עולה. כיוון ההתקדמות הוא הכיוון החץ $\left(\frac{-3}{\sqrt{10}},\frac{1}{\sqrt{10}}\right)$ (שקול לכיוון של החץ $(-3,1)$).

ו. תאיירו את הקודקוד, כיוון ההתקדמות, ואז ציירו פרבולה שמתקדמת בכיוון הזה.

2. מהו הערך הגבוה ביותר שמקבלת התבנית הריבועית $5x^2-2y^2$ עבור $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ שמקיים $x^2+y^2=1$.

$x^2+y^2=1$ אם ורק אם $\|(x,y)\|=\sqrt{x^2+y^2}=1$. אנחנו מחפשים את הערך המקסימלי שהתבנית $5x^2-2y^2$ יכולה לקבל לווקטור $\|(x,y)\|$ באורך 1, $\max_{\|(x,y)\|=1}5x^2-2y^2$.
מצד אחד $5x^2-2y^2\leq 5x^2+5y^2=5\|(x,y)\|^2=5$ כאשר $\|(x,y)\|=1$, ולכן הערך המקסימלי הזה קטן או שווה ל-5. מצד שני הוקטור $(x,y)=(1,0)$ הוא באורך 1 והוא מקיים $5x^2-2y^2=5\cdot1^2-2\cdot0^2=5$ ולכן הארך המקסימלי הזה באמת שווה 5.

3. מהו הערך הגבוה ביותר שמקבלת התבנית הריבועית $7x^2+3y^2-2xy$ עבור $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ שמקיים $x^2+y^2=1$.

אנחנו מחפשים את הערך המקסימלי שהתבנית $7x^2+3y^2-2xy$ יכולה לקבל לווקטור $\|(x,y)\|$ באורך 1, התבנית מיוצגת ע"י המטריצה $A=\begin{pmatrix}7 & -1\\ -1 & 3\end{pmatrix}$. נמצא את הערכים העצמיים שלה:
פולינום אפייני: $P_A(\lambda)=\det\begin{pmatrix}\lambda-7 & 1\\ 1 & \lambda-3\end{pmatrix}=\lambda^2-10\lambda+20$
ערכים עצמיים: $\lambda=\frac{-(-10)\pm\sqrt{(-10)^2-4\cdot1\cdot20}}{2\cdot1}=\frac{10\pm\sqrt{20}}{2}=5\pm\sqrt{5}$
בגלל שהמטריצה סימטרית יש לה בסיס <u>אורתונורמלי</u> של וקטורים עצמיים $v_{5+\sqrt{5}},v_{5-\sqrt{5}}$.
כעת לכל וקטור (x,y) יש הצגה $(\tilde{x},\tilde{y})$ בבסיס $v_{5+\sqrt{5}},v_{5-\sqrt{5}}$, $(x,y)=\tilde{x}v_{5+\sqrt{5}}+\tilde{y}v_{5-\sqrt{5}}$, וכמו שלמדנו $\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{\tilde{x}^2+\tilde{y}^2}$ ו- $7x^2+3y^2-2xy=(5+\sqrt{5})\tilde{x}^2+(5-\sqrt{5})\tilde{y}^2$.
אם ככה אנחנו מחפשים את הערך המקסימלי שהתבנית $(5+\sqrt{5})\tilde{x}^2+(5-\sqrt{5})\tilde{y}^2$ יכולה לקבל לווקטור $\|(\tilde{x},\tilde{y})\|$ באורך 1 ואם נמשיך כמו בתרגיל הקודם נקבל שזה $5+\sqrt{5}$.

4. תהיי A מטריצה שמייצגת את ההעתקה הלינארית $T:R^2\to R^2$ $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ שמשקפת נקודות ביחס לישר $y=mx$ העובר בראשית

א. הבע את הערכים העצמיים לפי m.
ב. לכל ע"ע הבע לפי m נוסחא לווקטור עצמי באורך 1.

נענה על שני הסעיפים ביחד. אם ניקח נקודה על הישר כמו $(1, m)$, ההעתקה תשאיר אותה כמו שהיא. זה אומר ש- $A\begin{pmatrix}1\\m\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\m\end{pmatrix}$ ולכן $(1, m)$ הוא ו"ע של הע"ע 1. ננרמל אותו ל- $v_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{m^2+1}}, \frac{m}{\sqrt{m^2+1}}\right)$.

הווקטור $v_2 = \left(\frac{-m}{\sqrt{m^2+1}}, \frac{1}{\sqrt{m^2+1}}\right)$ מאונך לו. הוא מייצג וקטור שיוצא מראשית הצירים בכיוון מאונך לישר השיקוף. לאחר השיקוף נקבל וקטור באותו אורך שמצביע לכיוון ההפוך – נקבל את $-v_2$. ז"א ש- $Av_2 = -v_2(-m, 1)$ ולכן $v_2 = \left(\frac{-m}{\sqrt{m^2+1}}, \frac{1}{\sqrt{m^2+1}}\right)$ הוא ו"ע נורמלי של הע"ע -1.

ג. הבע את A באמצעות m

נסמן ב- $E = \{(1,0), (0,1)\}$ את הבסיס הסטנדרטי ו- $B = \{v_1, v_2\}$ בסיס אורתונורמלי אחר. אנחנו מחפשים את $A = [T]^E = [I]_B^E [T]^B [I]_E^B$ (הזכרו איך מציגים העתקה ליניארית לפי בסיס).

לפי א' ו-ב' $[T]^B = \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{pmatrix}$,

לפי הגדרת מטריצת מעבר בסיס $[I]_B^E = \begin{pmatrix}| & |\\v_1 & v_2\\| & |\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{m^2+1}}\begin{pmatrix}1 & -m\\m & 1\end{pmatrix}$

ו- $[I]_E^B = [I]_B^{E^{-1}} = \frac{1}{\sqrt{m^2+1}}\begin{pmatrix}1 & m\\-m & 1\end{pmatrix}$

נכפיל ונקבל $A = \frac{1}{m^2+1}\begin{pmatrix}1 & -m\\m & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & m\\-m & 1\end{pmatrix} = \frac{1}{m^2+1}\begin{pmatrix}1-m^2 & 2m\\2m & m^2-1\end{pmatrix}$

ד. כיצד יראה הגרף של התבנית הריבועית המתאימה $z = \begin{pmatrix}x & y\end{pmatrix}A\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$?

הדטרמיננטה של A היא -1 (כי A צמודה למטריצה $\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{pmatrix}$) לכן המשוואה מגדירה פרבולואיד היפרבולי. למעשה, הפיתרון הוא סיבוב של הפרבולואיד $z = x^2 - y^2$ – זה הפרבולואיד $z = \tilde{x}^2 - \tilde{y}^2$ כאשר $(\tilde{x}, \tilde{y})$ הם הקורדינאטות לפי הבסיס של הוקטורים העצמיים - $B = \{v_1, v_2\}$ שמצאנו קודם.

5. מצא משוואה ריבועית מהצורה $ax^2 + 2bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$ המתארת:

I. אליפסה שמרכזה ב- $(5,3)$ ואורכי ציריה 2 ו- 4.

בשביל פשטות ניקח אליפסה שהצירים שלה מקבילים לצירי ה- x וה- y. אם היינו מחפשימפ אליפסה קנונית המשוואה הייתה $\frac{x^2}{2^2} + \frac{y^2}{4^2} = 1$, בגלל שאנחנו רוצים אליפסה שמרכזה ב- $(5,3)$ המשוואה שאנחנו מחפשים היא $\frac{(x-5)^2}{2^2} + \frac{(y-3)^2}{4^2} = 1$.

נפשט ל- $4(x-5)^2 + (y-3)^2 = 16$, ל- $4x^2 - 40x + 100 + y^2 - 6y + 9 = 16$ ולבסוף ל- $4x^2 + y^2 - 40x - 6y + 93 = 0$.

II. היפרבולה שהאסימפטוטות שלה הן $x = 6$ ו- $y = 2$.

איחוד הישרים האלה הוא פתרון המשוואה $(x-6)(y-2) = 0$, החלפת 0 באיזשהוא $r \neq 0$ יתן משוואת היפרבולה שהאסימפטוטות שלה יהיו הישרים. נבחר למשל $r = 1$ ונקבל $(x-6)(y-2) = 1$.

נפשט ל- $xy - 2x - 6y + 12 = 1$ ואז ל- $xy - 2x - 6y + 11 = 0$.

III. פרבולה שקודקודה ב- $(1,1)$ והיא סימטרית ביחס לישר $x = y$.

אם נסובב את כל המישור $45°$ מעלות נגד כיוון השעון נקבל קורדינאטות חדשות $\begin{pmatrix}\tilde{x}\\\tilde{y}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos 45° & -\sin 45°\\\sin 45° & \cos 45°\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix}x-y\\x+y\end{pmatrix}$. בקורדינאטות האלה הקודקוד $(1,1) = \sqrt{2}(\cos 45°, \sin 45°)$ יהפוך ל- $\left(0, \sqrt{2}\right) = \sqrt{2}(\cos 90°, \sin 90°)$ והישר $x = y$, שהוא הקבוצה $\{r(1,1) | r \in \mathbb{R}\}$ יהפוך לקבוצה $\left\{\left(0, r\sqrt{2}\right) | r \in \mathbb{R}\right\}$ שהיא הישר $\tilde{x} = 0$.

כעת מחפשים פרבולה בקורדינאטות החדשות עם קודקוד ב- $\left(0,\sqrt{2}\right)$ שסימטרית ביחס ל- $\tilde{x}=0$ – למשל $\tilde{y}=\tilde{x}^2+\sqrt{2}$. נחזור לקורדינאטות הקודמות ע"י הצבה של $\begin{pmatrix}\tilde{x}\\ \tilde{y}\end{pmatrix}=\frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix}x-y\\ x+y\end{pmatrix}$ ונקבל $\frac{\sqrt{2}}{2}(x+y)=\frac{1}{2}(x-y)^2+\sqrt{2}$, ששקול ל- $\frac{1}{2}x^2-xy+\frac{1}{2}y^2-\frac{\sqrt{2}}{2}x-\frac{\sqrt{2}}{2}y+\sqrt{2}=0$

6. קבע כיצד נראה הגרף של התבניות הריבועיות הבאות: פרבולויד אליפטי/פרבולויד היפרבולי/צילינדר פרבולי (שרטט בצורה כללית במערכת צירים): מי שלא זוכר את השמות מופנה לדף "איורים של משטחים מסדר שני".

I. $z=2x^2+8xy+8y^2+32x+64y+130$

התבנית מיוצגת ע"י המטריצה $A=\begin{pmatrix}2&4\\4&8\end{pmatrix}$. הדטרמיננטה שלה 0 ולכן המשוואה מייצגת מקרה קצה – צילינדר פרבולי.

II. $z=3x^2+8xy+y^2-24x-6y+9$

התבנית מיוצגת ע"י המטריצה $A=\begin{pmatrix}3&4\\4&1\end{pmatrix}$. הדטרמיננטה שלה שלילית ולכן המשוואה מייצגת פרבולואיד היפרבולי. נמצא את ציר המרכז: $\begin{pmatrix}x_0\\y_0\end{pmatrix}=-\frac{1}{2}A^{-1}\begin{pmatrix}d\\e\end{pmatrix}=\frac{-1}{2\cdot(-13)}\begin{pmatrix}1&-4\\-4&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-24\\-6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\3\end{pmatrix}$

נציב $x=x'+x_0=x',y=y'+y_0=y'+3$ במשוואה ונקבל צורה קנונית $z=3x'^2+8x'y'+y'^2$. יוצא ש- $r=0$ ולכן "נקודת האוכף" ב- $(0,3,0)$.

זה מספיק כדיט לצייר את הפרבולואיד, לא צריך לדייק. בבוחן אני אפרט בדיוק מה השאלה דורשת.

III. $z=-5x^2+8xy-5y^2$

התבנית מיוצגת ע"י המטריצה $A=\begin{pmatrix}-5&4\\4&-5\end{pmatrix}$. הדטרמיננטה שלה חיובית ולכן המשוואה מייצגת פרבולואיד אליפטי. אין מקדמים d,e ולכן ציר המרכז הוא $(0,0)$. גם $r=0$ לפי המשוואה ולכן הקודקוד של הפרבולואיד ב- $(0,0,0)$. בגלל שהע"ע שליליים, ורואים זאת מיד כי המכפלה שלהם (הדטרמיננטה) חיובית והסכום שלהם (העקבה) שלילי, בגלל שהע"ע שליליים זו פרבולואיד היפרבולי "עצוב" – הוא יורד למטה כמו פרבולה עצובה.

איור:

IV. $z=-4x^2+12xy-9y^2-8x+12y$

דומה ל-I. תרדו ממני, לקח יום שלם לכתוב את הדפים האלה.

7. נתונה המשוואה הריבועית $x^2-4xy+y^2+8x+2y-5=0$

I. הראה שאוסף הנקודות המקיימות את המשוואה יוצר צורה של היפרבולה במישור

התבנית המייצגת היא $A=\begin{pmatrix}1&-2\\-2&1\end{pmatrix}$ ויש לה דטרמיננטה שלילית. אם כך זו היפרבולה או מקרה קצה מתאים. בשביל לראות שזו הימרבולה צריך לראות ש- $r\neq 0$. נראה זאת בסעיפים הבאים.

II. מצא את מרכז ההיפרבולה

נמצא את המרכז לפי הנוסחא.

$$\begin{pmatrix}x_0\\y_0\end{pmatrix}=-\frac{1}{2}A^{-1}\begin{pmatrix}d\\e\end{pmatrix}=\frac{-1}{2\cdot(-3)}\begin{pmatrix}1&2\\2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}8\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$$

III. מהו המרחק בין קודקודי ההיפרבולה? (העבר לצורה קנונית ומצא מרחק בין נקודות חיתוך עם הצירים)

נציב $x=x'+x_0=x'+2,y=y'+y_0=y'+3$ במשוואה ונקבל צורה קנונית.

$x'^2-4x'y'+y'^2=-6$ (מה שמסיים את הוכחת I') ונכפיל ב- -1 כדי שיהיה לנו r חיובי $(r=6)$

$4x'y'-x'^2-y'^2=6$.

המטריצה המייצגת היא עכשיו $A=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 2 & -1\end{pmatrix}$ עם פולינום אופייני

$\det\begin{pmatrix}\lambda+1 & -2\\ -2 & \lambda+1\end{pmatrix}=\lambda^2+2\lambda-3=(\lambda-1)(\lambda+3)$. הע"ע החיובי הוא 1. המרחק של כל קודקוד מהראשית יהיה אם כן $\sqrt{\frac{r}{1}}=\sqrt{6}$ ובגלל שהם בכיוונים הפוכים מהראשית המרחק בין שני הקודקודים יהיה פי שניים מזה $2\sqrt{6}$.

8. הראה שאין נקודות במישור המקיימות את המשוואה $3x^2+2xy+3y^2+2x-6y+12=0$ (מתוקן)

למטריצה המייצגת $A=\begin{pmatrix}3 & 1\\ 1 & 3\end{pmatrix}$ דטרמיננטה חיובית ולכן זו אליפסה או מקרה קצה שלה. נמצא את המרכז והרדיוס. מרכז:
$$\begin{pmatrix}x_0\\ y_0\end{pmatrix}=-\frac{1}{2}A^{-1}\begin{pmatrix}d\\ e\end{pmatrix}=\frac{-1}{2\cdot 8}\begin{pmatrix}3 & -1\\ -1 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\ -6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{3}{4}\\ \frac{5}{4}\end{pmatrix}$$
נציב $x=x'+x_0=x'-\frac{3}{4}, y=y'+y_0=y'+\frac{5}{4}$ במשוואה ונקבל צורה קנונית.
$$3x'^2+2x'y'+3y'^2+\frac{27+30+75}{16}+\frac{-6-30}{4}-12=3x'^2+2x'y'+3y'^2=-11.25$$
ה"רדיוס של האליפסה" שלילי, לכן המשוואה באמת מגדירה קבוצה ריקה.

9. נתונה המשוואה הריבועית $4x^2-24xy-6y^2+4x-12y+1=0$
הראה שהמשוואה מתארת שני ישרים נחתכים, מצא את נקודת החיתוך ואת הזווית בין שני הישרים.

התבנית המייצגת היא $A=\begin{pmatrix}4 & -12\\ -12 & -6\end{pmatrix}$ ויש לה דטרמיננטה שלילית. בכדי שהמשוואה תגדיר חיתוך של שני ישרים צריך גם ש- r יהיה אפס. צריך לחשב את המרכז קודם:
$$\begin{pmatrix}x_0\\ y_0\end{pmatrix}=-\frac{1}{2}A^{-1}\begin{pmatrix}d\\ e\end{pmatrix}=\frac{-1}{2\cdot(-168)}\begin{pmatrix}-6 & 12\\ 12 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4\\ -12\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\ 0\end{pmatrix}$$
נציב $x=x'+x_0=x'-\frac{1}{2}, y=y'+y_0=y'$ במשוואה ונקבל צורה קנונית.
$$4x'^2-24x'y'-6y'^2=0$$
זה אכן חיתוך שני ישרים, ונקודת החיתוך היא (כמו תמיד) המרכז - $\left(-\frac{1}{2},0\right)$

בגלל ששינוי המשתנים שעשינו הזיז את כל המישור, ניתן גם לסובב את המישור ולהגיע לצורה קנונית. כל זה לא ישנה את הזווית בין שני הישרים. לצורה קנונית נמצא ע"ע:

פולינום אופייני: $\det\begin{pmatrix}\lambda-4 & 12\\ 12 & \lambda+6\end{pmatrix}=\lambda^2+2\lambda-168=(\lambda-12)(\lambda+14)$ ע"ע $12,-14$

וצורה קנונית $12\tilde{x}^2-14\tilde{y}^2=0$ ששקול ל- $\tilde{y}^2-\frac{6}{7}\tilde{x}^2=0$ ז"א $\left(\tilde{y}+\sqrt{\frac{6}{7}}\tilde{x}\right)\left(\tilde{y}-\sqrt{\frac{6}{7}}\tilde{x}\right)=0$ ולכן באסימפטוטות במקרה הזה הן $\tilde{y}=\pm\sqrt{\frac{6}{7}}\tilde{x}$.

הזווית של כל אחד אם ציר ה- $\tilde{x}$ היא $\arctan\sqrt{\frac{6}{7}}$ והם מצדדים שונים של הציר, ולכן הזווית בין שניהם היא פי שניים מזה - $2\tan\sqrt{\frac{6}{7}}$.

10. להלן משוואות בתלת מימד, מצאו בכלליות אילו צורות תלת-מימדיות הן מגדירות:

I. $x^2+4xy+y^2+2xz+2yz+2z^2=3$

המשוואה בצורה קנונית והתבנית המייצגת היא $A=\begin{pmatrix}1&2&1\\2&1&1\\1&1&2\end{pmatrix}$, נשתמש בקרטריון יעקובי:

$\det\Delta_1=\Delta_1=1>0$. $\Delta_2=\begin{pmatrix}1&2\\2&1\end{pmatrix}$, $\det\Delta_2=-3$ ו- $\frac{\det\Delta_2}{\det\Delta_1}=-3<0$ ו- $\Delta_3=A$, $\det\Delta_3=2\cdot(-6)-1\cdot(-1)+1\cdot1=-10$ ו- $\frac{\det\Delta_3}{\det\Delta_2}=\frac{10}{3}>0$. ולכן יש שני ע"ע גדולים מ-0 ואחד קטן מ-0. בגלל ש- $r=3>0$ הצורה שזה מגדיר היא היפרבולואיד חד יריעתי.

II. $2xz-2x^2-y^2-2z^2=9$

המשוואה בצורה קנונית והתבנית המייצגת היא $A=\begin{pmatrix}-2&0&1\\0&1&0\\1&0&-2\end{pmatrix}$, נשתמש בקרטריון יעקובי:

$\det\Delta_1=\Delta_1=-2<0$. $\Delta_2=\begin{pmatrix}-2&0\\0&1\end{pmatrix}$, $\det\Delta_2=-2$ ו- $\frac{\det\Delta_2}{\det\Delta_1}=1>0$ ו- $\Delta_3=A$, $\det\Delta_3=-2\cdot(-2)-0\cdot0+1\cdot(-1)=3$ ו- $\frac{\det\Delta_3}{\det\Delta_2}=-\frac{3}{2}<0$. ולכן יש שני ע"ע קטנים מ-0 ואחד גדול מ-0. בגלל ש- $r=9>0$ הצורה שזה מגדיר היא היפרבולואיד דו יריעתי.

III. $2x^2-14xy-y^2+8yz+2z^2=11$

המשוואה בצורה קנונית והתבנית המייצגת היא $A=\begin{pmatrix}2&-7&0\\-7&-1&4\\0&4&2\end{pmatrix}$, נשתמש בקרטריון יעקובי:

$\det\Delta_1=\Delta_1=2>0$. $\Delta_2=\begin{pmatrix}2&-7\\-7&-1\end{pmatrix}$, $\det\Delta_2=-51$ ו- $\frac{\det\Delta_2}{\det\Delta_1}=-\frac{51}{2}<0$ ו- $\Delta_3=A$, $\det\Delta_3=2\cdot(-51)-4\cdot8+0\cdot(-28)=-134$ ו- $\frac{\det\Delta_3}{\det\Delta_2}=\frac{268}{51}>0$. ולכן יש שני ע"ע גדולים מ-0 ואחד קטן מ-0. בגלל ש- $r=11>0$ הצורה שזה מגדיר היא היפרבולואיד חד יריעתי.

IV. $11x^2-6xy+y^2+2xz-2z^2=0$

המשוואה בצורה קנונית והתבנית המייצגת היא $A=\begin{pmatrix}11&-3&1\\-3&1&0\\1&0&-2\end{pmatrix}$, נשתמש בקרטריון יעקובי:

$\det\Delta_1=\Delta_1=11>0$. $\Delta_2=\begin{pmatrix}11&-3\\-3&1\end{pmatrix}$, $\det\Delta_2=2$ ו- $\frac{\det\Delta_2}{\det\Delta_1}=\frac{2}{11}>0$ ו- $\Delta_3=A$, $\det\Delta_3=-2\cdot(2)-0\cdot3+1\cdot(-1)=-5$ ו- $\frac{\det\Delta_3}{\det\Delta_2}=-\frac{5}{2}<0$. ולכן יש שני ע"ע גדולים מ-0 ואחד קטן מ-0. בגלל ש- $r=0$ הצורה שזה מגדיר היא מקרה הקצה – חרוט.

V. $x^2-2xy+y^2+z^2=5$

המשוואה בצורה קנונית והתבנית המייצגת היא $A=\begin{pmatrix}1&-1&0\\-1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$:

הפעם $\det A=0$ אז הניתוח הקודם לא פועל.
נמצא את הערכים העצמיים.

$$\det\begin{pmatrix}\lambda-1&1&0\\1&\lambda-1&0\\0&0&\lambda-1\end{pmatrix}=(\lambda-1)(\lambda^2-2\lambda)=\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)$$

אין צורך למצוא וקטורים עצמיים. ע"י סיבוב הצורה המרחב נקבל פתרון לצורה הקנונית $\lambda_1\tilde{x}^2+\lambda_2\tilde{y}^2+\lambda_3\tilde{z}^2=0$, ז"א $2\tilde{x}^2+\tilde{y}^2=0$. זה "גליל אליפטי".