תרגול 3 – אנליזה מודרנית

תזכורת: תהי X קבוצה כלשהי. $S\subseteq P(X)$ הינה σ-אלגברה של קבוצות ב X אם מתקיימים התנאים הבאים:

i. $A\in S\Rightarrow A^c\in S$.

ii. $X\in S$.

iii. $\{E_n\}\in S\Rightarrow\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n\in S$

דוגמאות: קבוצת כל הקבוצות, סיגמא אלגברה לבג, סיגמא אלגברה טריוויאלית, אם יש מרחב טופולוגי – סיגמא אלגברה בורל.

1. מצאו דוגמא לקבוצה X ושתי סיגמא אלגברות S_1 ו S_2, כל אחת מכילה תת קבוצות של X כך ש $S_1\bigcup S_2$ אינה סיגמא אלגברה.

פתרון: ניקח $X=\{1,2,3\}$, $S_1=\{\{1\},\{2,3\},\varnothing,\{1,2,3\}\}$ ו $S_2=\{\{1,2\},\{3\},\varnothing,\{1,2,3\}\}$. קל לראות כי S_1 ו S_2 הינן סיגמא אלגברות ואילו $S_1\bigcup S_2=\{\{1,2\},\{3,\},\{1\},\{2,3\},\varnothing,\{1,2,3,4\}\}$ אינה סיגמא אלגברה שכן $\{1,2\}\cap\{2,3\}\notin S_1\cup S_2$.

2. נניח כי $S_1\subset S_2\subseteq\cdots$ הינן סיגמא אלגברות המכילות תת קבוצות של X . האם $\bigcup_{n=1}^{\infty}S_n$ הינה סיגמא אלגברה? אם לא תנו דוגמא נגדית.

פתרון: נבחר את X להיות כל הסדרות המקבלות 0 או 1 כלומר $X=\{\{x_i\}:x_i=0\vee x_i=1\}$. נגדיר את S_1 להיות הסיגמא אלגברה הנוצרת מהקבוצה $A_1=\{\{x_i\}:\{x_i\}\in X,x_1=1\}$. נגדיר את S_2 להיות הסיגמא אלגברה הנוצרת מ A_1 ו $A_2=\{\{x_i\}:\{x_i\}\in X,x_2=1\}$. באופן איטרטיבי נגדיר את S_{n+1} להיות הסיגמא אלגברה הנוצרת מכל הקבוצות ב S_n והקבוצה $A_{n+1}=\{\{x_i\}:\{x_i\}\in X,x_{n+1}=1\}$. אינטואיטיבית ניתן להבין זאת כך: בסיגמא אלגברה S_n ניתן להבדיל בין ה n איברים הראשונים של הסדרות ב X . ברור כי $S_1\subset S_2\subseteq\cdots$ שכן כך בנינו אותן. נגדיר $S=\bigcup_{n=1}^{\infty}S_n$ ונראה כי $A=\bigcap_{n=1}^{\infty}A_n\notin S$. נניח בשלילה כי $A\in S$, אזי בהכרח כי $A\in S_n$ לאיזשהו $n\in\mathbb{N}$, אבל $A=\{(1,1,\ldots)\}$, כלומר A הינה קבוצה בעלת איבר אחד ואילו ב S_n כל הקבוצות הינן אינסופיות ולכן סתירה. מכאן ש S איננה סיגמא אלגברה.

3. הראו כי הסיגמא אלגברה הנוצרת ע"י הנקודונים ב $\mathbb{R}$ מוכלת ממש בסיגמא אלגברה בורל ב $\mathbb{R}$.

פתרון: נגדיר סיגמא אלגברה חדשה

$$S=\{A\subseteq\mathbb{R}\mid A\text{ is countable or }A^c\text{ is countable}\}$$

טענה: S הינה סיגמא אלגברה.

הוכחה: נבדוק תכונות

i. $\varnothing\in S\Rightarrow\mathbb{R}\in S$

ii. $A\in S\Rightarrow A\text{ is countable}\vee A^c\text{ is countable}\Rightarrow A^c\in S$

iii. נניח כי $\{A_n\}\in S$. אזי יתכנו 2 מקרים:

א. A_n בן מנייה לכל $n\in\mathbb{N}$. במקרה כזה ברור כי $\bigcup_n A_n$ הינה קבוצה בת מנייה ו $\bigcup_n A_n\in S$.

ב. אחת מהקבוצות A_n אינה בת מנייה נסמן אותה ב A_{n_0} . במקרה כזה $\left(\bigcup_n A_n\right)^c=\bigcap_n A_n^c=\bigcap_n A_n^c\cap A_{n_0}^c$ ולכן בת מנייה ולכן $\bigcup_n A_n\in S$.

מכאן קיבלנו ש S הינה סיגמא אלגברה.

כעת , נשים לב כי S מכילה את כל הנקודונים ב $\mathbb{R}$ ומכאן ש $\sigma(\{x\mid x\in\mathbb{R}\})\subseteq S$.ברור כי $S\subset\mathcal{B}(\mathbb{R})$ וסיימנו.

תזכורת: מידת לבג הינה הצימצום של מידת לבג החיצונית על הקבוצות המדידות. ע"י זה שאנו מצמצמים את התחום (הקבוצות שעליהן המידה מוגדרת) אנו מרוויחים את התכונה הבאה:

אם $\{E_n\}$ אוסף של קבוצות מדידות זרות אזי מתקיים

$$m\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n\right)=\sum_{n=1}^{\infty}m(E_n).$$

ראינו שעבור המידה החיצונית שמוגדרת על כל הקבוצות ב $\mathbb{R}$ תכונה זו לא מתקיימת תמיד.

בנוסף למידת לבג, ניתן להגדיר עוד מידות על $\mathbb{R}$. באופן יותר כללי, תהי S סיגמא אלגברה על קבוצה X , אזי μ מידה על S אם מתקיימות התכונות הבאות:

i. $\mu:S\to\mathbb{R}^+$.

ii. $\mu(\varnothing)=0$.

iii. אם $\{E_n\}$ זרות ב S אזי $\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n)$.

לשלשה (X, S, μ) קוראים מרחב מדיד.

דוגמאות למידה: מידת דירק, מידת הספירה, מידת הסתברות, מידת סטילטיס וכו'.

אפשר להראות כי תכונות המידה הן:

i. $A, B \in S$ ו $A \subseteq B$ אזי $\mu(A) \le \mu(B)$.

ii. אם $A_i \in S$ אז $\mu\left(\bigcup_i A_i\right) \le \sum_i A_i$.

iii. אם $A_i \in S$ וגם $A_i \subseteq A_{i+1}$ אזי $\mu\left(\bigcup_i A_i\right) = \lim_{i\to\infty} \mu(A_i)$.

iv. אם $A_i \in S$ וגם $A_i \supseteq A_{i+1}$ אזי אם $\mu(A_1) < \infty$ אז $\mu\left(\bigcap_i A_i\right) = \lim_{i\to\infty} \mu(A_i)$.

4. מצאו דוגמא נגדית למקרה הרביעי. כלומר, הניחו שכל התנאים מתקיימים מלבד $\mu(A_1) = \infty$ והראו שמתקיים $\mu\left(\bigcap_i A_i\right) \ne \lim_{i\to\infty} \mu(A_i)$.

פתרון: תהי $\mu = m$, מידת לבג. נסתכל על הקבוצות הבאות $\mathrm{E}_n = [n, \infty)$. ברור כי $\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n = \varnothing$ ולכן, עפ"י תכונה 2 של המידה נובע כי $0 = \mu(\varnothing) = \mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n\right)$. מצד שני לכל n $\mu([n,\infty)) = \infty$ ולכן $\lim_{i\to\infty} \mu(A_i) = \infty \ne \mu\left(\bigcap_i A_i\right) = 0$.