

בחינה בקורס חשבון אינפיניטסימלי 1 (88-132-07) – מועד ב

אוניברסיטת בר-אילן, יום ו, ו ניסן תשפה (4.4.25)

מרצה: פרופ' בועז צבאן

מתרגלים: גב' אושרית שטוסל, ד"ר פאבל שטיינר

משך הבחינה: שעתיים וחצי

אין להשתמש בחומר עזר כלשהו

הנחיות

1. יש לענות בגוף השאלון בלבד. מחברת הטיוטה לא תיבדק.

2. המבחן מורכב משני חלקים.

(א) בחלק הראשון (30 נקודות) שאלות שיש לסמן עבורן נכון/לא נכון, ללא נימוק. **יש לענות על כל השאלות בחלק זה.**

כדי לעבור את המבחן יש לצבור לפחות 6 תשובות נכונות בחלק זה, ולהשלים בעזרת החלק השני ל 60 נקודות או יותר.

(ב) בחלק השני (66 נקודות) שאלות שיש לענות עליהן בכתב. **יש לענות על 2 שאלות מתוך 3.** משקל כל שאלה: 33 נקודות.

(ג) עד 4 נקודות יינתנו עבור סדר, נקיון, ואלגנטיות של התשובות. השתמשו במחברת הבחינה לטיוטה, ולאחר שמצאתם פתרון, כיתבו אותו בצורה מסודרת בגוף הבחינה.

3. בשאלה עם כמה סעיפים הנקודות מתחלקות בשווה, בקירוב, בין סעיפי השאלה.

4. אם המקום המיועד לתשובה לא מספיק, אפשר להמשיך את הפתרון במקומות הבאים, לפי סדר עדיפויות יורד:

(א) גב הדף של השאלה שאתם פותרים.

(ב) שני הדפים הנוספים בסוף המבחן (בשני העמודים של כל דף).

(ג) דף של שאלה אחרת (שני צדדיו).

(ד) בטופס נוסף שתבקשו מהבוחנים, וישודך לטופס המקורי.

בכל מקרה כזה יש לציין בכל עמוד שהסתיים היכן הפתרון ממשיך.

5. אם אתם כותבים פתרון שאלה בעמוד אחר מעמוד השאלה, יש לציין בעמוד של השאלה את מיקום הפתרון.

בהצלחה!

חלק ראשון: שאלות כן/לא

לכל אחת מהטענות הבאות, סמנו האם היא נכונה או לא נכונה. אין צורך לנמק.

א. הסידרה $\left(\sqrt{\frac{e^n}{n^e}}\right)_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת.

נכון / לא נכון

ב. ייתכן שהסידרה $(|a_n|)_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת ולמרות זאת הסידרה $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ לא מתכנסת אפילו במובן הרחב.

נכון / לא נכון

ג. אם $\sup A = 7$ אז יש בקבוצה A סידרה עולה ממש $a_n \rightarrow 7$.

נכון / לא נכון

ד. $\frac{\sqrt[n]{n!}}{n} \rightarrow \frac{1}{e}$.

נכון / לא נכון

ה. אם הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס, אז הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ מתכנס.

נכון / לא נכון

ו. אם $a_n \rightarrow 0^+$ אז הטור $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$ מתכנס.

נכון / לא נכון

ז. אם הטורים $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ו $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ מתכנסים בהחלט, אז $\sum_{n=2}^{\infty} \sum_{i=1}^{n-1} a_i b_{n-i} = \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right) \cdot \left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n\right)$.

נכון / לא נכון

ח. אם f רציפה בקטע הסגור $[0, 2]$ ומתקיים $f(0) < f(2)$ אז $[f(0), f(2)] = \{f(x) : 0 \leq x \leq 2\}$.

ט. תהי f פונקציה גזירה בקטע הפתוח $(3, 6)$, ומקיימת $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 6^-} f(x)$. אז יש נקודה $3 < c < 6$ שעבורה $f'(c) = 0$.

נכון / לא נכון

י. יהיו f, g גזירות בסביבה מנוקבת של הנקודה 0 כך ש $g'(x) \neq 0$ בסביבה זו, ומתקיים:

$$f(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$$

$$g(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0.$$

אם $\frac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1$ אז גם $\frac{f'(x)}{g'(x)} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1$.

נכון / לא נכון

חלק שני: שאלות כתיבה

ענו בצורה מלאה ומנומקת על שתי שאלות מבין שלושת השאלות הבאות.

שאלה 1

א. הוכח שאם $a_n \leq b_n$ לכל n אז $\overline{\lim} a_n \leq \overline{\lim} b_n$.

ב. הוכח שאם $0 < a_n$ לכל n אז $\overline{\lim} \sqrt[n]{a_n} \leq \overline{\lim} \frac{a_{n+1}}{a_n}$.

שאלה 2

א. הוכח או הפרך: הפונקציה $\sin(x^2)$ רציפה במידה שווה בתחום $(0, \infty)$.

ב. לכל מספר ממשי x נגדיר

$$f(x) := \begin{cases} 2 - x & x \in \mathbb{Q} \\ \frac{1}{x} & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}.$$

מצא את כל הנקודות a שבהן הפונקציה f רציפה.

שאלה 3

א. הוכח שלכל מספר טבעי n מתקיים $\frac{1}{n+1} < \log(1 + \frac{1}{n}) < \frac{1}{n}$.

(רמז: $1 + \frac{1}{n} = \frac{n+1}{n}$)

ב. הוכח שהטור $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\log^2 n}{n}$ מתכנס. (כאשר $\log^2 x := (\log x)^2$)

דף נוסף ראשון לפתרון שאלות (למי שהמקום בדפים הקודמים לא הספיק)

דף נוסף שני לפתרון שאלות (למי שהמקום בדפים הקודמים לא הספיק)