

בחינה לדוגמא – מבוא לאנליזה 1

ענו על כל השאלות הבאות, כל שאלה שווה 25 נק'.
ללא חומר עזר. משך הבחינה 3 שעות.
בהצלחה!

1. (א) הסדרה $\{a_n\}$ חיובית ומתכנסת לגבול $L \in \mathbb{R}$. הוכיחו כי $L \geq 0$.
(ב) הסדרה $\{b_n\}$ מקיימת $|b_n| \leq a_n$ לכל n טבעי. הוכיחו שיש לה תת-סדרה המתכנסת לגבול סופי.

2. חשבו אחד מהגבולות הבאים:

$$(i) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \right) \quad (ii) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)^{2n}$$

3. הפונקציה $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ רציפה בכל נקודה ומקיימת $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$.
(א) הוכיחו ש- f מקבלת מינימום גלובלי, כלומר קיימת נקודה x_0 כך ש- $f(x_0) \leq f(x)$ לכל $x \in \mathbb{R}$.
(ב) נתון גם ש- f גזירה פעמיים בכל \mathbb{R} ויש לה מקסימום מקומי בנקודה $x_0 < x_1$.
הוכיחו שיש נקודה c בה $f''(c) = 0$.

$$4. \text{ נתונה הפונקציה } f(x) = \begin{cases} \frac{\ln(1+x^2)}{2x} & x \neq 0 \\ a & x = 0 \end{cases}$$

- (א) עבור אילו ערכי a הפונקציה רציפה בנקודה $x = 0$?
(ב) עבור אילו ערכי a הפונקציה גזירה בנקודה $x = 0$? מהי $f'(0)$ במקרים אלו?