פתרון תרגיל בית 11 בתורת החבורות
88-218 סמסטר א' תשפ"ב

שאלה 1. תהי $H \leq \mathbb{Q}$ תת־חבורה מאינדקס סופי. הוכיחו כי $H = \mathbb{Q}$.
הסיקו כי גם ל-$\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ אין תת־חבורות נאותות מאינדקס סופי.

פתרון. נניח $n = [\mathbb{Q} : H] \in \mathbb{N}$. מפני ש-$\mathbb{Q}$ אבלית, אז H תת־חבורה נורמלית. לפי תרגיל מהכיתה לכל איבר $a \in \mathbb{Q}$ יתקיים $n \cdot a \in H$. לכן $n\mathbb{Q} \subseteq H$. אבל לכל $a \in \mathbb{Q}$, מתקיים כי $a = n\frac{a}{n} \in n\mathbb{Q}$. כלומר $\mathbb{Q} \subseteq n\mathbb{Q} \subseteq H \subseteq \mathbb{Q}$. לכן $H = \mathbb{Q}$.
לחלק השני בשאלה, פשוט משתמשים במשפט ההתאמה. תת־החבורות מאינדקס סופי של $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ הן מן הצורה $H/\mathbb{Z}$ כאשר H היא תת־חבורה מאינדקס סופי של $\mathbb{Q}$ שמכילה את $\mathbb{Z}$. אבל יש רק את $H = \mathbb{Q}$, ולכן תת־החבורה היחידה של $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ מאינדקס סופי היא $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$.

שאלה 2. תהי G חבורה, ותהי $H \leq G$. הוכיחו שאם $N_1, N_2 \lhd G$ תת־חבורות נורמליות המקיימות $N_1 \cap H = N_2 \cap H$, אז $(HN_1)/N_1 \cong (HN_2)/N_2$.

פתרון. מיידי משימוש כפול במשפט האיזומורפיזמים השני:

$$(HN_1)/N_1 \cong H/(N_1 \cap H) = H/(N_2 \cap H) \cong (HN_2)/N_2$$

שאלה 3. תהי G חבורה סופית, ותהיינה $H, N \leq G$ תת־חבורות נורמליות שעבורן מתקיים $([G:H], [G:N]) = 1$. הוכיחו כי $G = HN$.
אתגר (רשות): אפשר לוותר על הדרישה לנורמליות, והטענה תשאר נכונה!

פתרון. בכיתה למדנו שמפני ש-$H, N \lhd G$, אז HN היא תת־חבורה (ואפילו נורמלית). בנוסף $H, N \leq HN$. מכפליות האינדקס נקבל

$$[G:H] = [G:HN][HN:H]$$

וטענה דומה עבור N. לכן $[G:HN]$ מחלקת את $[G:H]$ ואת $[G:N]$. מהנתון שהאינדקסים האלו זרים נסיק כי $[G:HN] = 1$, ולכן $G = HN$.

שאלה 4. תהי שרשרת עולה של חבורות $G_1 \subseteq G_2 \subseteq G_3 \subseteq \ldots$, ונסמן $H = \bigcup_i G_i$ עבור איחודן. בשאלת רשות 8 בתרגיל בית 4 ראינו כי H היא חבורה.

א. הוכיחו שאם G_i היא חבורה פשוטה לכל i, אז גם H פשוטה.
הערה: כך ניתן ליצור חבורות פשוטות אינסופיות מחבורות פשוטות סופיות.

ב. תהי S חבורה פשוטה אינסופית. הוכיחו שאם $K \leq S$ תת־חבורה, אז $[S:K] = 1$ או $[S:K] = \infty$. רמז: העידון של משפט קיילי.

פתרון.

א. תהי $N \lhd H$. לכן לכל $h \in H$ מתקיים $hNh^{-1} = N$. בפרט לכל i ולכל $g \in G_i$ מתקיים $gNg^{-1} = N$. נתבונן בחיתוך $N \cap G_i$. מתקיים שכל $gxg^{-1} \in g(N \cap G_i)g^{-1}$ שייך גם ל-N (כי היא סגורה להצמדה) ושייך גם ל-G_i (כי זו מכפלה של איברים מ-G_i). לכן $N \cap G_i \lhd G_i$.
אבל לכל i החבורה G_i פשוטה, ולכן או ש-$N \cap G_i = G_i$ או ש-$N \cap G_i = \{e\}$.
אם $N \neq \{e\}$ אז קיים $k \in \mathbb{N}$ כך ש-$N \cap G_k \neq \{e\}$, שהרי איבר $n \in N$ שאינו טריוויאלי מוכל ב-G_i כלשהו. לכן $N \cap G_k = G_k$. בפרט לכל $i \geq k$ מתקיים $N \cap G_i \neq \{e\}$, ולכן $N \cap G_i = G_i$. כלומר $G_i \subseteq N$ לכל $i \geq k$. אזי

$$N \subseteq H = \bigcup_i G_i = \bigcup_{i \geq k} G_i \subseteq N$$

וקיבלנו $H = N$. לכן אין ל-H תת־חבורות נורמליות לא טריוויאליות, כדרוש.

ב. אם $S=K$, אז $[S:K]=1$ וסיימנו. אחרת, $K\subsetneq S$. נניח בשלילה כי $[S:K]=n<\infty$. לפי העידון של משפט קיילי, K מכילה תת־חבורה נורמלית $N\lhd S$ המקיימת $[S:N]\,|\,n!$. כלומר $[S:N]<\infty$. מפני ש-S פשוטה ו-$S\neq N$ (כי N מוכלת ב-K) נורמלית, אז בהכרח $N=\{e\}$. לכן $[S:N]=\infty$, וזו סתירה.

שאלה 5. תהי G חבורה סופית, ו-$N\lhd G$ תת־חבורה נורמלית כך ש $(|N|\,,[G\colon N])=1$. הוכיחו בעזרת משפטי האיזומורפיזמים שאין ב-G עוד תת־חבורה מסדר $|N|$. (רמז: הוכיחו ש$[H:H\cap N]=1$ לכל תת־חבורה H מסדר $|N|$.)

פתרון. תהי $H\leq G$ תת־חבורה מסדר $|N|$. ננסה להראות ש-$[H\colon H\cap N]=1$ וזה יוכיח כי $H\subseteq N$ ובגלל הגודל נקבל שיוויון.

מכיוון ש-N נורמלית, אז $NH\leq G$ היא תת־חבורה. מצד אחד, לפי משפט לגראנז' $[H\colon H\cap N]\mid |H|=|N|$.

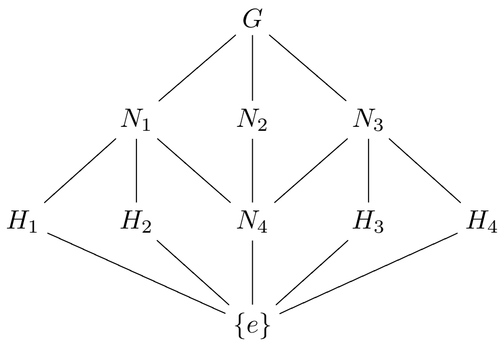
מצד שני, לפי משפט האיזומורפיזמים השני $[H\colon H\cap N]=[NH\colon N]$ ולפי כפליות האינדקס $[NH\colon N]\mid[G\colon N]$, ולכן $[H\colon N\cap H]\mid[G\colon N]$.

קיבלנו ש-$[H\colon H\cap N]$ הוא מחלק משותף של $|N|$ ו-$[G\colon N]$, אך הם זרים לפי הנתון ולכן $[H\colon H\cap N]=1$.

שאלות רשות

את שאלות הרשות אין חובה לפתור, אבל אם פתרתם אותן, בבקשה צרפו את הפתרון שלהן.

שאלה 6. תהי חבורה G עם סריג תת־החבורות הבא:



כאשר $H_i\leq G$ ו-$N_i\lhd G$. הוכיחו כי $G\cong D_4$.

רמז: סמנו $k=[G:N_1]$ והשתמשו כמה פעמים במשפטי האיזומורפיזמים. כנראה בדרך תצטרכו להוכיח ש-k ראשוני, ואז מוכרח להיות $k=2$.

בהצלחה!