

מבחן דמה – מבוא לאנליזה 1 למורים

משקל כל שאלה 24 נק', ענו על כל השאלות.

1. חשבו את הגבולות הבאים:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\sin^2(x)) \cdot e^{\sin(x)}}{x \cdot \ln(1+x)} \quad \text{א.}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\sin^2(x)) \cdot e^{\sin(x)}}{x \cdot \ln(1+x)} = \lim_{x \rightarrow 0} e^{\sin(x)} \cdot \frac{\sin(\sin^2(x))}{\sin^2(x)} \cdot \left(\frac{\sin(x)}{x}\right)^2 \cdot \frac{x}{\ln(1+x)} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[x]{x+1} \quad \text{ב. ב.}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[x]{x+1} = \lim_{x \rightarrow \infty} (x+1)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{\ln\left((x+1)^{\frac{1}{x}}\right)} = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{\frac{\ln(x+1)}{x}} = e^0 = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x+1)}{x} \stackrel{\infty}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{1+x} \stackrel{\text{L'Hopital}}{=} 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{n^2}}{3^{4n}} \quad \text{ג. ג.}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{n^2}}{3^{4n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2^n}{3^4}\right)^n = \infty$$

$$2. \text{ נביט בפונקציה } f(x) = \begin{cases} \frac{\sin(x) - x}{x^3} & x \neq 0 \\ a & x = 0 \end{cases}$$

א. לאילו ערכי a הפונקציה $f(x)$ רציפה ב $x = 0$? אחרת, איזה סוג אי רציפות יש ב $x = 0$?

ראשית נחשב את הגבול בנקודה $x = 0$:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x) - x}{x^3} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x) - 1}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-1}{3} \cdot \frac{1 - \cos(x)}{x^2} = \frac{-1}{6}$$

לכן אם $a = \frac{-1}{6}$ הפונקציה רציפה, ואחרת ישנה אי רציפות סליקה.

ב. לאילו ערכי a הפונקציה $f(x)$ גזירה ב $x = 0$? מהי $f'(0)$ במקרים אלה?

אם הפונקציה אינה רציפה ב $x = 0$, וודאי אינה גזירה שם.

לכן נבדוק גזירות לפי ההגדרה ב $x = 0$, כאשר $a = \frac{-1}{6}$.

$$f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin(h) - h}{h^3} - \frac{-1}{6}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{6\sin(h) - 6h + h^3}{6h^4} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{6\cos(h) - 6 + 3h^2}{24h^3} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{6\cos(h) - 6 + 3h^2}{24h^3}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-6\sin(h) + 6h}{72h^2} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-6\cos(h) + 6}{144h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{24} \cdot \frac{1 - \cos(h)}{h} = 0$$

לכן f גזירה ב $x = 0$, כאשר $a = \frac{-1}{6}$ והנגזרת בנקודה הינה $f'(0) = 0$.

3. תהי f פונקציה רציפה בכל הממשיים כך ש $f(0) = 1$ ולכל x מתקיים כי $f(x) \neq x$

$$\text{א. הוכיחו כי } \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$$

נעביר אגף ונביט בפונקציה $h(x) = f(x) - x$. פונקציה זו רציפה בכל הממשיים כסכום של רציפות.

נעת ידוע כי לכל x מתקיים כי $h(x) \neq 0$ ולכן $h(x)$ בעלת סימן קבוע, אחרת לפי משפט ערך הביניים היא הייתה צריכה לחתוך את הציר.

כיון ש $h(0) = f(0) - 0 = 1$, נובע כי $h(x) > 0$ לכל x .

כלומר, לכל x מתקיים כי $f(x) > x$ ולכן לפי חצי סנדוויץ' ברור כי $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$.

(סיכום הפתרון במילים אחרות: הפונקציה $f(x)$ נמצאת מעל הפונקציה x בנקודה 0 ולעולם לא חותכת אותה. לכן היא תמיד מעליה [רציפות] ולכן שואפת גם היא לאינסוף).

ב. נניח בנוסף כי f גזירה בכל הממשיים. הוכיחו/הפריכו: $f'(x) \geq 1$ לכל x

למעשה אנו שואלים האם בהנתן שפונקציה אחת תמיד גדולה מפונקציה שנייה, אפשר להסיק כי הנגזרת של הראשונה גדולה או שווה לשנייה.

קל יותר להעביר אגף, ולשאל האם הפונקציה החיובית $h(x) > 0$ חייבת לקיים $h'(x) = f'(x) - 1 \geq 0$.

אבל פונקציה חיובית לא צריכה להיות עולה, למשל e^{-x} חיובית ויורדת.

מכאן מצאנו הפרכה: $f(x) = x + e^{-x}$. אכן $f(x) \neq x$, $f(0) = 1$ וכמו כן $f'(x) = 1 - e^{-x} < 1$.

4. תהי f פונקציה רציפה, גזירה וחיובית בכל הממשיים, כך ש $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)-1}{x} = f'(0)$.

א. הוכיחו כי $f(0) = 1$.

ראשית f גזירה ב $x = 0$ ולכן רציפה שם, כלומר $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$.

כעת

$$f(0) - 1 = \lim_{x \rightarrow 0} (f(x) - 1) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - 1}{x} \cdot x = 0$$

נתון בנוסף כי קיימת נק' $0 < x_0$ עבורה $\ln(f(x_0)) = x_0$.

ב. הוכיחו כי קיימת נקודה c עבורה $f'(c) = f(c)$.

נעביר אגף ונביט בפונקציה $h(x) = \ln(f(x)) - x$ (הפונקציה מוגדרת כיוון שנתון כי f חיובית).

ידוע כי $h(0) = \ln(1) - 0 = 0$ וכמו כן $h(x_0) = 0$.

h רציפה וגזירה בכל הממשיים כצירוף של גזירות ולכן לפי משפט רול קיימת נקודה $0 < c < x_0$ עבורה

$$h'(c) = 0$$

לכן $0 = h'(c) = \frac{f'(c)}{f(c)} - 1$ ומכאן $f'(c) = f(c)$.

א. הוכיחו כי לכל $x > 0$ מתקיים $\ln(1+x) < x$.

יהי $x > 0$.

נפעיל את משפט לאגראנז' על הפונקציה הגזירה (ולכן רציפה) $\ln(1+x)$ בקטע $[0, x]$.

$$\text{קיימת נקודה } 0 < c < x \text{ עבורה } \frac{1}{1+c} = \frac{\ln(1+x) - \ln(1+0)}{x-0}$$

$$\text{כיון ש } 0 < c < x \text{ נובע כי } \frac{1}{1+c} < \frac{1}{1+0} = 1$$

$$\text{ביחד } \frac{\ln(1+x)}{x} < 1 \text{ נכפול במספר החיובי } x \text{ ונקבל } \ln(1+x) < x$$

ב. נביט בסדרה a_n המוגדרת ע"י נוסחת הנסיגה $a_{n+1} = \ln(1+a_n)$ ותנאי ההתחלה $a_1 = 1$.

הוכיחו כי הסדרה a_n מתכנסת ומצאו את גבולה.

אנו רוצים להשתמש באי השיוויון מסעיף א', שנכון לגבי מספרים חיוביים.

לכן נוכיח באינדוקציה כי הסדרה הזו חיובית.

עבור $n=1$ מתקיים כי $a_1 = 1 > 0$. יהי n עבורו $a_n > 0$ צריך להוכיח כי $a_{n+1} > 0$.

$$\text{אכן } a_{n+1} = \ln(1+a_n) > \ln(1) = 0$$

כעת, לכל n מתקיים כי $a_{n+1} = \ln(1+a_n) < a_n$ לפי סעיף א', כלומר מדובר בסדרה מונוטונית יורדת.

כיון ש a_n חסומה מלרע על ידי אפס, היא מתכנסת לגבול סופי L . כיון שהסדרה חיובית, נובע כי $L \geq 0$.

כיון שלכל n מתקיים $a_{n+1} = \ln(1+a_n)$, נשאיף את שני הצדדים לאינסוף ונקבל כי $L = \ln(1+L)$ לפי סעיף א'

נובע כי $L=0$.