

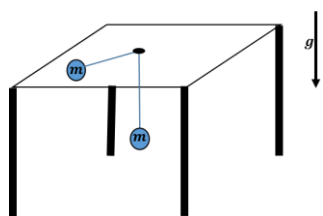
פיזיקה למתמטיקאים – 88-320 - מועד ב

מרצים: ד"ר ברוך ברזל, מר ניר שרייבר

משך המבחן: 3 שעות

חומר עזר מותר בשימוש: מחשבון, דפי נוסחאות שהוכנו על ידי הסטודנט (עד 15 דפים).

ענו על 3 מ-4 השאלות הבאות (רק שלוש). כל שאלה – 33 נקודות.
ניתן לענות, בנוסף על השלוש הנ"ל, גם על שאלה 5 (שאלת בונוס - לא חובה). בונוס – 10 נקודות.
אנא סמנו בברור על איזה שאלות בחרתם להשיב והקיפו את תשובותיכם הסופיות.



1. מערכת של 2 מסות מחוברות באמצעות חבל שאורכו L בשדה כבידה g על פי השרטוט. המסה העליונה מאולצת לנוע על מישור השולחן, והמסה התחתונה מאולצת לנוע לאורך הציר האנכי z .
 - א. הגדירו מערכת קואורדינאטות מתאימה ורשמו את הלגרנזיאן של המערכת.
 - ב. רשמו את משוואות התנועה עבור הקואורדינאטות שמצאתם ב-א.
 - ג. הראו כי התנע הזוויתי של המערכת $(L = \vec{r}_1 \times \vec{p}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{p}_2)$ הוא גודל שמור.
 - ד. מצאו את תדירות התנודות הקטנות של המערכת סביב שיווי משקל.

2. מטוטלת מתמטית (מסה m בקצה חוט שאורכו l) תלויה מתקרת מעלית הנעה במהירות קבועה $\vec{v} = v_0 \hat{y}$ ביחס למערכת המעבדה. תאוצת הכובד היא $\vec{g} = -g \hat{y}$.
 - א. רשמו את הלגרנזיאן במערכת המעלית \mathcal{L} .
 - ב. רשמו את הלגרנזיאן במערכת המעבדה \mathcal{L}' .
 - ג. הראו כי שני הלגרנזיאנים מקיימים $\mathcal{L}' = \mathcal{L} + \frac{df(\theta, t)}{dt}$ כאשר $f(\theta, t) = -mv_0 l \cos \theta - mgv_0 t^2 + mv_0^2 t$.
 - ד. רשמו את משוואות התנועה עבור \mathcal{L} .
 - ה. רשמו את משוואות התנועה עבור \mathcal{L}' . השוו לתוצאת סעיף ד והסבירו.

3. חלקיק שמסתו m נע בחופשיות בתחום $0 \leq x \leq L$, דהיינו תחת הפוטנציאל

$$V(x) = \begin{cases} \infty & x < 0 \\ 0 & 0 \leq x \leq L \\ \infty & x > L \end{cases}$$

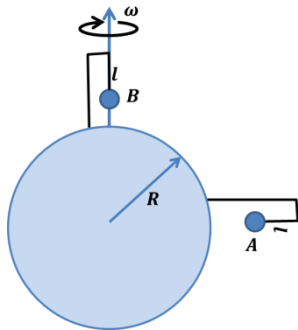
זכור אופרטור המיקום הוא x , אופרטור התנע הוא $p_x = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}$ וההמילטוניאן הוא $H = \frac{p_x^2}{2m} + V(x)$. משואת שרדינגר הסטאציונארית היא

$$H\psi(x) = E\psi(x)$$

(כאשר הערך העצמי $E \geq 0$).

- א. פתרו את המשוואה ומצאו את המצבים העצמיים של החלקיק, ואת ערכי האנרגיה המתאימים.
- ב. במכניקה קלאסית האנרגיה היא משתנה רציף. מהו הגבול שבו הפתרון של סעיף א' מתנהג בהתאם למכניקה הקלאסית?
- ג. עבור חלקיק מסוים נתון כי ערך האנרגיה שיימדד הוא בוודאות E (הסתברות שווה לאחד, E הוא אחד מערכי האנרגיה המותרים על פי סעיף א). מהו המצב של החלקיק?
- ד. מודדים את המיקום x של החלקיק מסעיף ג'. מהי צפיפות ההסתברות $P(x = x_0)$ למצוא אותו ב- x_0 ?
- ה. הראו כי ישנם מקומות אסורים, שצפיפות ההסתברות למצוא בהם את החלקיק היא אפס.

4. לחתול של שרדינגר שני מצבים אורתונורמליים אפשריים: מילל $|\mu\rangle$ או שותק $|\sigma\rangle$. אופרטור ההשתקה מקיים $A|\sigma\rangle = A|\mu\rangle = |\sigma\rangle$ ואופרטור היללנות מקיים $B|\sigma\rangle = B|\mu\rangle = |\mu\rangle$.
- א. הראו כי המצב $|\varphi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\sigma\rangle - |\mu\rangle)$ הוא גם מצב עצמי של A ו- B . מהו הערך העצמי המתאים?
- ב. פרופ' שרדינגר רקח במעבדתו את אופרטור החילוף $C = A + B - I$, כאשר I מייצג את אופרטור היחידה. הראו כי אופרטור זה אכן מחליף בין מצבי החתול.
- ג. מצאו את המצבים העצמיים של C , והשתמשו במשפט הספקטרלי על מנת לקבל את הייצוג המטריציוני של האופרטור.
- ד. בוקר אחד החתול התעורר במצב $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\sigma\rangle + i|\mu\rangle)$. פרופ' שרדינגר החליט להפעיל על החתול את האופרטור C (פעולת מדידה). מהם תוצאות המדידה האפשריות ומהי ההסתברות לכל תוצאה?



5. **בנוס** רדיוס כדור הארץ R ותאוצת הכובד כל פניו היא g . מהירות הסיבוב של כדור הארץ סביב ציר צפון-דרום היא ω . שרטטו את הכוחות הפועלים על מטוטלת A התלויה בקו המשווה ועל מטוטלת B התלויה בקטב הצפוני (בשני המקרים אורך החוט l). מהי תדירות התנודות הקטנות סביב שיווי משקל של כל אחת מן המטוטלות הני"ל?