

2.3 מרחב - 3 מרחב

מרחב R מרחב

$g = f \cdot h$ - \Rightarrow $h \in R$ מרחב $f \cdot g$

$(f, g) =$ מרחב - (מרחב R מרחב) מרחב $f \cdot g$ -
 $Rf + Rg = R(f, g)$
 $(f, g) = 1$ מרחב f, g

$F[x] \subseteq K[x]$ מרחב $F \subseteq K$ - מרחב

$f, g \in F[x]$ - מרחב

$K \rightarrow F$ מרחב מרחב F מרחב

$K[x] \rightarrow f \cdot g \iff F[x] \rightarrow f \cdot g$ מרחב $f, g \in F[x] \subseteq K[x]$ מרחב

מרחב \iff מרחב

$g = f \cdot h$ - \Rightarrow $h \in K[x]$ מרחב K מרחב $f \cdot g$ - מרחב \implies

$F[x]$ מרחב מרחב $f, g \in F[x]$ מרחב $g = q \cdot f + r$ מרחב
 $\deg(r) < \deg(f)$

$r = g - q \cdot f = (h - q) \cdot f$ \leftarrow

K מרחב $f \mid r$ \leftarrow

$(h = q$ מרחב) F מרחב $f \cdot g$ מרחב $r = 0$ \leftarrow

$F[x] \cap K[x] = F[x]$ מרחב

$f, g \in F[x] \subseteq K[x]$ מרחב

$K[x]$ מרחב מרחב $f, g \iff F[x] \rightarrow$ מרחב f, g

$d = 1$ מרחב $d \in K[x]$ מרחב $d \mid f, g$ - $\iff d \in F[x]$ מרחב \implies מרחב

F מרחב מרחב f, g מרחב \iff

$d \cdot f + p \cdot g = 1$ - \Rightarrow $d, p \in F[x]$ מרחב מרחב f, g

K מרחב F מרחב מרחב f, g מרחב

מרחב מרחב

$a \in K$ $F \subseteq K$

$\Phi_a : F[x] \rightarrow K$ מרחב

מרחב $f(x) \mapsto f(a)$ מרחב

$$\langle h \rangle = I = \ker \Phi_a \triangleleft F[X]$$

פרק 2

$$\{ f \mid f(a) = 0 \}$$

pk
K le
קטגוריה
הקבוצה
המיוצגת
ב F

הצגה של קבוצת האותיות a, I = 0

(מפתח לפרק a מניק) $I = \langle h \rangle$

יש $f(x) \in F[X]$ ויש $h(x)$

$h \mid f \iff f(a) = 0$

"a היא השכיחה של הריבוי"

הקבוצה הזו היא קבוצת האותיות. נכתוב אותה כ K.

$$F[X] / \langle h \rangle = F[X] / I \cong \text{Im } \Phi_a = F[a] \cong K$$

כל הפונקציות של F[X] שמתחלקות ב h מתחלקות ב I.

כל הפונקציות של F[a] מתחלקות ב h.

כל הפונקציות של F[X] שמתחלקות ב h מתחלקות ב I.

כל הפונקציות של F[X] שמתחלקות ב h מתחלקות ב I.

$$F[X] / \langle h \rangle \cong F[a]$$

$$\deg h = n, \{ a_0 + a_1x + \dots + a_{n-1}x^{n-1} \mid a_i \in F \}$$

המרחב הווקאלי של הפולינומים של מעלה n-1.

כל הפונקציות של F[X] שמתחלקות ב h מתחלקות ב I.

הקבוצה הזו היא קבוצת האותיות.

המרחב הווקאלי של הפולינומים של מעלה n-1.

1. a היא השכיחה של הריבוי.

2. קבוצת האותיות.

$$\dim_F F[a] = \deg f$$

המרחב הווקאלי של הפולינומים של מעלה n-1.

כל הפונקציות של F[X] שמתחלקות ב h מתחלקות ב I.

כל הפונקציות של F[X] שמתחלקות ב h מתחלקות ב I.

כל הפונקציות של F[X] שמתחלקות ב h מתחלקות ב I.

$$\deg h = \dim F[X] / \langle h \rangle = \dim F[a] = \deg f$$

③ ⇐ ① - בהוכחה הקודמת.

נסתד: $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{5})$ הוא המינימום של $\sqrt{2} + \sqrt{5}$.

$\alpha = \sqrt{2} + \sqrt{5}$ (נסו)

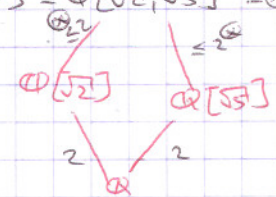
$\alpha^2 = 7 + 2\sqrt{10}$

$\alpha^4 - 14\alpha^2 + 49 = (\alpha^2 - 7)^2 = 40$

$\alpha^4 - 14\alpha^2 + 9 = 0$

יש להוכיח שזה המינימום המינימלי, מספיק להוכיח - $4 = \dim_{\mathbb{Q}}[\mathbb{Q}(\sqrt{2} + \sqrt{5})]$

כבר - $\mathbb{Q}(\sqrt{2} + \sqrt{5}) \subseteq \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{5})$



$\dim_F K = [K:F]$

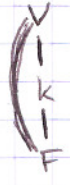
הוכחה: $\sqrt{2}$ הוא אפס של $x^2 - 2$ שהוא אי-רציונלי

$[\mathbb{Q}(\sqrt{2}) : \mathbb{Q}] = 2$

הוכחה: $\sqrt{5}$ הוא אפס של $x^2 - 5$ שהוא אי-רציונלי

הוכחה: $F \subseteq K$ ו- V היא K כ- F

$\dim_F V = [K:F] \cdot \dim_K V$



$a \in K, F \subseteq L \subseteq K$

$[L[a] : L] \leq [F[a] : F]$

|| \leq || $\deg h_L \leq \deg h_F$ (הוכחה: המינימום של L הוא חלק מהמינימום של F)

$\deg h_L \leq \deg h_F \iff h_L | h_F$

$\sqrt{5} \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})$ נובע $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) = \mathbb{Q}(\sqrt{5})$ נגזר מ- $[\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{5}) : \mathbb{Q}] = 2$ ו- $[\dots] = 4$

$\sqrt{5} = a + b\sqrt{2}$

$5 = a^2 + 2b^2 + 2ab\sqrt{2}$

$\sqrt{10} \in \mathbb{Q}$ ו- $\sqrt{5} \in \mathbb{Q}$ - נגזר מ- $ab=0, \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$

$\sqrt{2}, \sqrt{5} \in \mathbb{Q}(\sqrt{2} + \sqrt{5})$ (הוכחה)

$$a^2 = 7 + 2\sqrt{6}$$

$$a^3 = 2\sqrt{2} + 6\sqrt{5} + 15\sqrt{2} + 5\sqrt{5} = 17\sqrt{2} + 11\sqrt{5}$$

$$\mathbb{Q}[a] \ni a^3 - 11a = 6\sqrt{2}$$

$$\sqrt{2} = a - \sqrt{2}$$

$$\mathbb{Q}[\sqrt{2} + \sqrt{5}] = \mathbb{Q}[\sqrt{2}, \sqrt{5}] \quad ; \text{ מילד מברון פסי}$$

$$[\mathbb{Q}[a] : \mathbb{Q}] = [\mathbb{Q}[\sqrt{2}, \sqrt{5}] : \mathbb{Q}] = 4$$

$$\stackrel{11}{\text{deg}} (x^4 - 14x^2 + 9)$$

פונקציה קני מניינין יסוד קני $x^4 - 14x^2 + 9$ פסי

$\sqrt{n} \in \mathbb{Z}$ סיו $\sqrt{n} \in \mathbb{Q}$ $n \in \mathbb{Z}$ $n \in \mathbb{Z}$ $\sqrt{2} : \mathbb{Q}$

פונקציה מניינין פסי $\sqrt{p_1}, \sqrt{p_2}, \dots, \sqrt{p_t} : \mathbb{Q} = 2^t$ $\sqrt{2} : \mathbb{Q}$

זכר $K = F[a_1, \dots, a_n]$ n מניינין מניינין

$$[F[a_1, \dots, a_n] : F] \leq \prod_{i=1}^n [F[a_i] : F]$$

$L = F[a_1, \dots, a_n]$ n מניינין מניינין

$$[K : F] = [K : L] \cdot [L : F] \leq [F[a_n] : F] \cdot [L : F] \leq \prod_{i=1}^n [F[a_i] : F]$$

$\alpha_1, \dots, \alpha_n \in K$ n מניינין $f \in \mathbb{Q}[x]$ $f \in \mathbb{Q}[x]$

קני f n מניינין K $f(x) = (x - \alpha_1) \cdot \dots \cdot (x - \alpha_n)$ n מניינין

$(f \in \mathbb{Q}[x])$

זכר f n מניינין $f \in \mathbb{Q}[x]$ n מניינין

זכר f n מניינין $F = F_1$ n מניינין $f \in \mathbb{Q}[x]$ F n מניינין $f \in \mathbb{Q}[x]$

f n מניינין n מניינין n מניינין

$$F \subset F_1 = \mathbb{Q}[x] / \langle h \rangle, \quad F_1 \text{ מניינין}$$

h n מניינין n מניינין $\lambda + \langle h \rangle \in F_1$ n מניינין

$$h(\lambda + \langle h \rangle) = h(\lambda) + \langle h \rangle = 0 + \langle h \rangle = \langle h \rangle$$

f n מניינין n מניינין h n מניינין $F_1 \rightarrow$

$$F_1 = \mathbb{Q}[x] / \langle x^2 - 5 \rangle = \{ \lambda^2 - 5 \text{ מניינין } F_1 \text{ מניינין} \}$$

$$= \{ a + b\lambda + \langle x^2 - 5 \rangle \}$$

14.10.13

lösen mit 5 300

$$(\lambda + \langle \lambda^2 - 5 \rangle)^2 = \lambda^2 + \langle \lambda^2 - 5 \rangle$$

$$(\lambda + \langle \rangle)^2 - (5 + \langle \rangle) = (\lambda^2 - 5) + \langle \lambda^2 - 5 \rangle = \langle \lambda^2 - 5 \rangle$$