24.10.13 בס"ד ב' חשון תשע"ד

מופשטת 3 - הרצאה מס' 2.

<u>תזכורת:</u> R תחום שלמות.

- $f|g$ אם קיים $h\in R$ כך ש- $g=f\cdot h$.
- מחלק משותף מקסימלי (אם R תחום ראשי) - המחולק המשותף הגדול ביותר $=(f,g)$

$Rf+Rg=R(f,g)$

f,g זרים אם $(f,g)=1$.

נניח ש- $F\subseteq K$ שדות. $F[\lambda]\subseteq K[\lambda]$.

נניח ש- $f,g\in F[\lambda]$.

המושגים הנ"ל אינם תלויים בהחלפת F ב- K.

<u>טענה:</u> $f,g\in F[\lambda]\subseteq K[\lambda]$. אזי $f|g$ ב- $F[\lambda]$ $\Leftarrow$ $f|g$ ב- $K[\lambda]$.

<u>הוכחה:</u> $\boxed{\Leftarrow}$ טריוויאלי.

$\boxed{\Rightarrow}$ נניח ש- $f|g$ מעל K. כלומר, קיים $h\in K[\lambda]$ כך ש- $\underset{F}{g}=\underset{F}{f}\cdot \underset{K}{h}$.

נכתוב $g=q\cdot f+r$ עבור $q,r\in F[\lambda]$ בעזרת האלגוריתם של $F[\lambda]$.
$\deg(r)<\deg(f)$

$\Leftarrow$ $\underset{F}{r}=g-q\cdot f=(\underset{K}{h}-\underset{F}{q})\cdot \underset{F}{f}$

$\Leftarrow$ $f|r$ מעל K.

$\Leftarrow$ $r=0$ ולכן $f|g$ מעל F (ובפרט $h=q$).

<u>הערה:</u> $F(\lambda)\cap K[\lambda]=F[\lambda]$

<u>טענה 2:</u> $f,g\in F[\lambda]\subseteq K[\lambda]$.

f,g זרים ב- $F[\lambda]$ $\Longleftrightarrow$ f,g זרים מעל $K[\lambda]$.

<u>הוכחה:</u> $\boxed{\Rightarrow}$ נניח $d\in F[\lambda]$ ו- $d|f,g$, אזי $d\in K[\lambda]$ ולכן $d=1$.

$\boxed{\Leftarrow}$ ידוע f,g זרים מעל F.

לכן קיימים פולינומים $\alpha,\beta\in F[\lambda]$ כך ש- $\alpha f+\beta g=1$.

אבל השוויון הזה נכון גם מעל K.

<u>הפולינום המינימלי:</u>

$F\subseteq K$. $a\in K$.

נגדיר $\Phi_a: F[\lambda]\longrightarrow K$

$f(\lambda)\longmapsto f(a)$ ברור שזה הומומורפיזם של חוגים.

גרעין $\langle h\rangle = I = \ker \Phi_a \triangleleft F[x]$

$= \{ f \mid f(a)=0 \}$

K יקרא אלגברית אם
F מעל [illegible] של K.

* $I=0$, a נקרא <u>טרנסצנדנטי</u>.

ואחרת קיים $h\in F[x]$ (מתוקן) כך ש- $I=\langle h\rangle$. (אחרת a נקרא אלגברי)

ואז: $f(a)=0 \leftrightarrow h\mid f$.

h הוא <u>"הפולינום המינימלי של a"</u>.

הקטן ביותר ביחס החלוקה
הקטן ביותר מבחינת מעלה.

$F[x]/\langle h\rangle = F[x]/I \cong \operatorname{Im}\Phi_a = F[a] \subseteq K$.

אם K הוא אלגברה אז הכל טוב עד כאן.

כעת, אם נניח כי K הוא תחום שלמות אז $F[a]$ תח"ש

לכן $F[x]/\langle h\rangle$ תח"ש ולכן $\langle h\rangle$ ראשוני, כלומר h ראשוני.

מכיוון ש- $F[x]$ ראשי, $\langle h\rangle$ מקסימלי.

$\Leftarrow$ $F[x]/\langle h\rangle \cong F[a]$ <u>שדה</u>.

$\deg h=n$, $\{\alpha_0+\alpha_1 a+\dots+\alpha_{n-1}a^{n-1} \mid \alpha_i\in F\}$

<u>מסקנה</u>: פולינום מינימלי הוא אי-פריק.

<u>הגדרה</u>: נניח $F\le K$, $a\in K$, $f(a)=0$ עבור $f\in F[x]$.

איך יודעים האם f מינימלי?

התנאים הבאים שקולים:

1. f הפול' המינימלי של a.
2. f אי-פריק.
3. $\dim_F F[a]=\deg f$

<u>הוכחה</u>: 1 $\Leftarrow$ 2: הוכחנו ש- $F[x]/\langle h\rangle \cong F[a]$ $\Leftarrow$ f ראשוני.

2 $\Leftarrow$ 1: יהי h הפולינום המינימלי, אז $f\in\langle h\rangle$ לכן $h\mid f$,

אבל f אי-פריק לכן $f=h$.

3 $\Leftarrow$ 1: יהי h הפולינום המינימלי.

$\boxed{\deg h = \dim F[x]/\langle h\rangle = \dim F[a]} = \deg f$

24.10.13 מבנה ב' חשבון משו״ה

① ⇐ ③: $\boxed{}$ - מהנוסחה הקודמת.

דוגמה: מצאו את הפולינום המינימלי של $\sqrt{2}+\sqrt{5}$.

נסמן $a=\sqrt{2}+\sqrt{5}$ $/()^2$

$$a^2=7+2\sqrt{10}$$

$$a^4-14a^2+49 \quad =(a^2-7)^2=40$$

$$a^4-14a^2+9=0$$

כדי להראות שזה הפולינום המינימלי, מספיק להראות ש- $4=\dim \mathbb{Q}[\sqrt{2}+\sqrt{5}]$.

ברור ש- $\mathbb{Q}[\sqrt{2}+\sqrt{5}]\subseteq\mathbb{Q}[\sqrt{2},\sqrt{5}]$

$$\begin{tikzcd}
 & \mathbb{Q}[\sqrt{2},\sqrt{5}] \arrow[dl, dash, "\le 2"'] \arrow[dr, dash, "\le 2"] & \\
\mathbb{Q}[\sqrt{2}] \arrow[dr, dash, "2"'] & & \mathbb{Q}[\sqrt{5}] \arrow[dl, dash, "2"] \\
 & \mathbb{Q} &
\end{tikzcd}$$

- $\sqrt{2}$ מאפס את x^2-2 שהוא אי-פריק ⇐ $\dim_F K=[K:F]$

$$[\mathbb{Q}[\sqrt{2}]:\mathbb{Q}]=2$$

- $\sqrt{5}$ מאפס את הפולינום x^2-5 שהוא אי פריק ⇐ $[\mathbb{Q}[\sqrt{5}]:\mathbb{Q}]=2$

למה: $F\subseteq K$. V מ"ו מעל K.

$$\dim_F V=[K:F]\cdot\dim_K V.$$

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[d, dash] \\
K \arrow[d, dash] \\
F
\end{tikzcd}$$

טענה: $F\subseteq L\subseteq K$, $a\in K$.

$$[L[a]:L]\le[F[a]:F]$$

$$\begin{tikzcd}
 & K \arrow[d, dash] & \\
 & L[a] \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & \\
L \arrow[dr, dash] & & F[a] \arrow[dl, dash] \\
 & F &
\end{tikzcd}$$

הערה:
$[L[a]:L] = \deg h_L$ ← הפול' המינימלי מעל L.
$\le$
$[F[a]:F] = \deg h_F$ ← הפול' המינימלי מעל F

⇐ $h_L \mid h_F$ ⇐ $\deg h_L\le\deg h_F$.

נניח, אם $[\mathbb{Q}[\sqrt{2},\sqrt{5}],\mathbb{Q}]=2$ אז בהכרח $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]=\mathbb{Q}[\sqrt{5}]$ כלומר $\sqrt{5}\in\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$

אז $[\ldots\ldots]=4$

אם לא

$$\sqrt{5}=a+b\sqrt{2}$$

$$\Downarrow$$

$$5=a^2+2b^2+\underline{2ab\sqrt{2}}$$

מכיוון ש- $\sqrt{2}\notin\mathbb{Q}$, $ab=0$ ונקבל ש- $\sqrt{5}\in\mathbb{Q}$ או $\sqrt{10}\in\mathbb{Q}$

נשאר להראות $\sqrt{2},\sqrt{5}\in\mathbb{Q}[\overset{a}{\sqrt{2}+\sqrt{5}}]$

$a^2 = 7+2\sqrt{6}$

$a^3 = 2\sqrt{2}+6\sqrt{5}+15\sqrt{2}+5\sqrt{5} = 17\sqrt{2}+11\sqrt{5}$

$\mathbb{Q}[a] \quad \Rightarrow a^3-11a = 6\sqrt{2}$

$\sqrt{5} = a-\sqrt{2}$

לכן השדות שווים : $\mathbb{Q}[\sqrt{2}+\sqrt{5}] = \mathbb{Q}[\sqrt{2},\sqrt{5}]$.

$$\Leftarrow \quad [\mathbb{Q}[a]:\mathbb{Q}] = [\mathbb{Q}[\sqrt{2},\sqrt{5}]:\mathbb{Q}] = 4$$

$$\overset{\shortparallel}{\deg(x^4-14x^2+9)}$$

לכן x^4-14x^2+9 הוא הפול המינימלי והוא אי-פריק.

...: לכל $n\in\mathbb{Z}$, אם $\sqrt{n}\in\mathbb{Q}$ אז $\sqrt{n}\in\mathbb{Z}$.

...: $[\mathbb{Q}[\sqrt{p_1},\sqrt{p_2},\dots,\sqrt{p_t}]:\mathbb{Q}] = 2^t$ כאשר p_i ראשוניים שונים.

תכונה מחסרונה: נניח ש- $K=F[a_1,\dots,a_n]$ שדה.

$$[F[a_1,\dots,a_n]:F] \le \prod_{i=1}^{n}[F[a_i]:F]$$

הוכחה: באינדוקציה: נסמן $L=F[a_1,\dots,a_n]$.

$$[K:F] = \underset{L[a_n]}{[K:L]}\cdot[L:F] \underset{\text{הטענה}}{\le} [F[a_n]:F]\cdot[L:F] \le \prod_{i=1}^{n}[\dots$$

...: $f\in F[x]$. $F\subseteq K$ <u>מפצל את f</u> אם יש $\alpha_1,\dots,\alpha_n\in K$ כך ש- $f(x)=(x-\alpha_1)\cdot\dots\cdot(x-\alpha_n)$. ($K$ המינימלי מעל F הוא הוא המפצל את f.)

...: לכל $f\in F[x]$ יש שדה מפצל.

...: לכל פולינום מעל שדה F, $f\in F[x]$, יש שדה $F\subseteq F_1$ שבו יש ל-f שורש.

(נבחר גורם אי-פריק h של f.

נבנה את F_1, $F\subset F_1 = F[x]/\langle h\rangle$.

נשים לב ש- $x+\langle h\rangle\in F_1$ הוא שורש של h:

$h(x+\langle h\rangle) = h(x)+\langle h\rangle = 0+\langle h\rangle =$

כך ב-F_1 יש שורש ל-h ולכן גם ל-f.

נבנה F_1 עבור x^2-5: $F_1 = \mathbb{Q}[x]/\langle x^2-5\rangle =$

$= \{a+bx+\langle x^2-5\rangle\}$

14.10.13 שני ט' חשוון תשע"ד

$$(x+\langle x^2-5\rangle)^2 = x^2+\langle x^2-5\rangle$$

$$(x+\langle\ \rangle)^2-(5+\langle\ \rangle) = (x^2-5)+\langle x^2-5\rangle = \langle x^2-5\rangle$$