מבוא לאלגברה לינארית -פתרון תרגיל 9 שחלוף

תרגיל 1. תהיה מטריצה $A\in R^{n\times n}$ הוכח: A סימטרית ואנטי-סמטרית אם ורק אם $A=0$ (A היא מטריצת האפס)

פתרון. (כיוון $\Leftarrow$) תהי A מטריצה סימטרית ואנטי-סמטרית אז מתקיים

$$\begin{cases} A=A^t \\ -A=A^t \end{cases}$$
$$\Downarrow$$
$$A=A^t=-A$$
$$\Downarrow$$
$$A=-A$$
$$\Downarrow$$
$$A=0$$

(כיוון $\Rightarrow$) אכן מתקיים

$$\begin{cases} 0=0^t \\ -0=0^t \end{cases}$$

לכן 0 היא מטריצה סימטרית ואנטי סימטרית.

תרגיל 2. הוכח שבמטריצה אנטי סמטרית אברי האלכסון שווים ל-0.

פתרון. תהי Aמטריצה אנטי סמטרית לכן מתקיים

$$\forall i,j: \quad a_{ij}=-a_{ji}$$

בפרט עבור אברי האלכסון מתקיים

$$\forall i: \quad a_{ii}=-a_{ii}$$
$$\Downarrow$$
$$\forall i: \quad a_{ii}=0$$

תרגיל 3. תהי מטריצה $A\in R^{n\times n}$ הוכח ש-AA^t היא מטריצה סימטרית.

פתרון. בכדי להראות ש AA^t היא מטריצה סימטרית, צריך להראות ש-$\left(AA^t\right)^t=AA^t$ ואכן מתקיים

$$\left(AA^t\right)^t=\left(A^t\right)^t A^t=AA^t$$

תרגיל 4. בתרגול הוכחנו ש-$W=\{A\in R^{n\times n}|A=A^t\}$תת מרחב של $V=R^{n\times n}$ וחשבו את $dim\left(W\right)$ עבור $n=3$, ונסו להסיק למה שווה $dim\left(W\right)$ עבור n כללי.

פתרון. בנבדוק למה W שווה.

$$W =$$
$$\left\{ A \in R^{3\times3} | A = A^t \right\} =$$
$$\left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \in R^{3\times3} | \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} \right\} =$$
$$\left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \in R^{3\times3} | a_{21} = a_{12}, a_{31} = a_{13}, a_{23} = a_{32} \right\} =$$
$$\left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} \in R^{3\times3} \right\} =$$
$$Span \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

זהו בסיס ל-W לכן המימד של W שווה ל-6 (מספר האיברים בבסיס).
הרעיון הוא שיש חופש בחירה לשים מה שרוצים על האלכסון ומעל האלכסון, אבל ברגע שבוחרים את האיברים מעל האלכסון האיברים מתחת לאלכסון נקבעים. באופן כללי, על האלכסון יש n איברים, מעל האלכסון יש $\frac{n^2-n}{2}$ איברים, לכן המימד של W עבור n כללי הוא
$$\frac{n^2-n}{2} + n = \frac{n^2+n}{2}$$
ועבור $n = 3$ נקבל $6 = \frac{3^2+3}{2}$ בהתאם למה שקבלנו.

תרגיל 5. הוכיחו ש-$W = \{A \in R^{n\times n} | A = -A^t\}$ הוא תת מרחב של $V = R^{n\times n}$ וחשבו את $dim\left(W\right)$ עבור $n = 3$.

פתרון. כדי להוכיח ש-W הוא תת מרחב צריך להוכיח שני דברים

1. שייכות של מטריצת ה-0: בשאלה 1 הוכחנו שמטריצה האפס היא אנטי-סמטרית ולכן שייכת ל-W.

2. סגירות לחיבור וכפל בסקלר: היו A, B מטריצות אנטי סמטרית לכן
$$\left(A + \alpha B\right)^t = A^t + \alpha B^t = -A - \alpha B = -\left(A + \alpha B\right)$$
כלומר יש סגירות לחיבור ולכן W הוא תת מרחב.

כעת נחשב את המימד

$$
\begin{aligned}
W &= \\
\left\{A \in R^{3\times 3} | A = -A^t\right\} &= \\
\left\{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \in R^{3\times 3} | \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}\right\} &= \\
\left\{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \in R^{3\times 3} | a_{21} = -a_{12}, a_{31} = -a_{13}, a_{23} = -a_{32}, a_{ii} = 0\right\} &= \\
\left\{\begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ -a_{12} & 0 & a_{23} \\ -a_{13} & -a_{23} & 0 \end{pmatrix} \in R^{3\times 3}\right\} &= \\
Span\left\{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}\right\}
\end{aligned}
$$

זהו בסיס ל-W לכן המימד של W שווה ל-3 (מספר האיברים בבסיס). באופן כללי המימד הוא $\frac{n^2-n}{2}$

בהצלחה!!