

מבחן דמה – מבוא לאנליזה 1 למורים

משקל כל שאלה 24 נק', ענו על כל השאלות.

1. חשבו את הגבולות הבאים:

$$\text{א. } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\sin^2(x)) \cdot e^{\sin(x)}}{x \cdot \ln(1+x)} \quad \text{ב. } \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[x]{x+1} \quad \text{ג. } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{n^2}}{3^{4n}}$$

$$2. \text{ נביט בפונקציה } f(x) = \begin{cases} \frac{\sin(x) - x}{x^3} & x \neq 0 \\ a & x = 0 \end{cases}$$

א. לאילו ערכי a הפונקציה $f(x)$ רציפה ב $x = 0$? אחרת, איזה סוג אי רציפות יש ב $x = 0$?

ב. לאילו ערכי a הפונקציה $f(x)$ גזירה ב $x = 0$? מהי $f'(0)$ במקרים אלה?

3. תהי f פונקציה רציפה בכל הממשיים כך ש $f(0) = 1$ ולכל x מתקיים כי $f(x) \neq x$.

$$\text{א. הוכיחו כי } \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$$

ב. נניח בנוסף כי f גזירה בכל הממשיים. הוכיחו/הפריכו: $f'(x) \geq 1$ לכל x .

$$4. \text{ תהי } f \text{ פונקציה רציפה, גזירה וחיובית בכל הממשיים, כך ש } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - 1}{x} = f'(0)$$

$$\text{א. הוכיחו כי } f(0) = 1.$$

נתון בנוסף כי קיימת נק' $x_0 > 0$ עבורה $\ln(f(x_0)) = x_0$.

ב. הוכיחו כי קיימת נקודה c עבורה $f'(c) = f(c)$.

5.

א. הוכיחו כי לכל $x > 0$ מתקיים $\ln(1+x) < x$.

ב. נביט בסדרה a_n המוגדרת ע"י נוסחת הנסיגה $a_{n+1} = \ln(1+a_n)$ ותנאי ההתחלה $a_1 = 1$.

הוכיחו כי הסדרה a_n מתכנסת ומצאו את גבולה.