

לינארית להנדסה- תרגיל 6

תרגיל 1.

- נתון שהמטריצה $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ מתקיים $A^2 + 5A + 6I = 0$ הוכיחו כי A הפיכה.
- תהי $A \in M_{n \times n}(\mathbb{F})$ כך ש- A מאפסת את $x^2 + x$ כלומר $A^2 + A = 0$ האם A בהכרח אינה הפיכה?

תרגיל 2. כתבו את המטריצה $\begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 5 & 5 & 1 \\ -1 & -3 & 0 \end{pmatrix}$ וההופכית שלה (אם קיימת) כמכפלה של מטריצות אלמנטריות

תרגיל 3. יהיו $A, B \in \mathbb{F}^{n \times n}$ כך ש- A הפיכה. הוכח או הפרך:

- למערכות $\begin{cases} ABx = 0 \\ Ax = 0 \end{cases}$ אותם פתרונות.
- למערכות $\begin{cases} BAx = 0 \\ A^{-1}x = 0 \end{cases}$ אותם פתרונות.
- לכל ווקטור $b \neq 0$ למערכות $\begin{cases} ABx = b \\ BAx = b \end{cases}$ אותם פתרונות.

תרגיל 4. הוכח או הפרך:

- אם $A^2 = 0$ אז $A = 0$
 - אם $A^2 = I$ אז $A = I$
- תרגיל 5.** תהייה A ו- B מטיצות ריבועיות מאותו סדר, כך שמתקיים $A^3 = I$ ו- $BA = A(A + I)$ הוכיחו שמתקיים

$$1. A^{-1} = A^2$$

$$2. B = A + I$$

$$3. BABA = A^2B^2$$

שאלה 6. האם הקבוצות הבאות הן תתי מרחבים?

1. האם $W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : z^2 = x^2 + y^2 \right\}$ (נסו לחשוב מה הצורה הזאת מתאר) הוא תת מרחב ווקטורי של \mathbb{R}^3 ביחס לחיבור וכפל בסקלר הרגילים?

2. האם $W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : x^2 + y^2 + z^2 \leq 36 \right\}$ (נסו לחשוב מה הצורה הזאת מתאר) הוא תת מרחב ווקטורי של \mathbb{R}^3 ביחס לחיבור וכפל בסקלר הרגילים?

3. האם $W = \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : a_{12} = a_{21} = 0 \right\}$ הוא תת מרחב ווקטורי של $\mathbb{R}^{2 \times 2}$ ביחס לחיבור וכפל בסקלר הרגילים?

4. האם $W = \{A \in \mathbb{R}^{n \times n} : tr(A) = 0\}$ הוא תת מרחב ווקטורי של $\mathbb{R}^{n \times n}$ ביחס לחיבור וכפל בסקלר הרגילים?

תרגיל 7. יהי V מרחב ווקטורי מעל \mathbb{F} . יהיו $u, v, w \in V$ בהינתן ש- u אינו וקטור ה-0, האם נכון לומר ש-

$$span(\{u\}) = span(\{u, v\}) \cap span(\{u, w\})$$

תרגיל 8. מה צריך להיות k כדי שהקבוצה $\left\{ \begin{pmatrix} k \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ k \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ תהיה תלוייה לינארית מעל \mathbb{R} ?

תרגיל 9. יהי $V = \mathbb{R}_3[x]$ מרחב הפולינומים ממעלה קטנה או שווה ל-3, ותהי

$$U = \{p(x) \in V \mid p(x) = x \cdot p'(x)\}$$

תת קבוצה של V . $p'(x)$ היא הנגזרת של $p(x)$

1. הוכיחו ש- U תת מרחב של V .

2. מצאו בסיס ומימד ל- U .

תרגיל 10. יהיו U, W תתי מרחבים ווקטורים של V . יהיו $u, v, w \in V - \{0\}$ כך ש-

$$\bullet u \in U, u \notin W$$

$$\bullet w \in W$$

$$\bullet w \in W \text{ ש-} v \text{ אינו כפולה סקלרית של } w$$

הוכיחו ש- v אינו צירוף לינארי של u ו- w .

תרגיל 11.

1. יהי $V = \{A \in \mathbb{R}^{3 \times 3} \mid A = A^t\}$ האם קיימים 4 תתי מרחבים לא טריוויאלים V_1, V_2, V_3, V_4 של V כך ש-

$$\{0\} \subset V_1 \subset V_2 \subset V_3 \subset V_4 \subset V$$

? (הכלה חזקה)

2. יהי $V = \{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} \mid A = A^t\}$ האם קיימים 4 תתי מרחבים לא טריוויאלים V_1, V_2, V_3, V_4 של V כך ש-

$$\{0\} \subset V_1 \subset V_2 \subset V_3 \subset V_4 \subset V$$

:(הכלה חזקה) רמז: אם $W \subset V$ תת מרחב של V אז $\dim(W) < \dim(V)$

בהצלחה!!