מבחן מועד א' – מבוא לאנליזה 1 למורים – 88-611-01

זמן המבחן: 3 שעות. חומר עזר: מחשבון פשוט בלבד. משקל כל שאלה 24 נק', ענו על כל השאלות.

1. חשבו את הגבולות הבאים:

א. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin\left(\ln(1+x)\right)\cdot x\cdot \sin(e^x)}{1-\cos\left(x\right)}$ ב. $\lim\limits_{x\to 0}\left(1-\cos(x)\right)^x$ ג. $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{(2n)!}{\left(n!\right)^2}}$

2. נביט בפונקציה $f(x)=\begin{cases}\frac{e^x-1-x}{x^2} & x\neq 0\\ a & x=0\end{cases}$

א. לאילו ערכי $a$ הפונקציה $f(x)$ רציפה ב $x=0$? אחרת, איזה סוג אי רציפות יש ב $x=0$?

ב. לאילו ערכי $a$ הפונקציה $f(x)$ גזירה ב $x=0$? מהי $f'(0)$ במקרים אלה?

3. (אין קשר בין הסעיפים)

א. מצאו את הערך המקסימלי והערך המינימלי של הפונקציה $x^8-x^9$ בקטע $[0,1]$.

ב. הוכיחו כי לכל $x>0$ מתקיים כי $e^x-1\leq xe^x$.

4.

א. הוכיחו כי קיימת נקודה $c\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ עבורה $\tan(c)=c$

ב. הוכיחו כי $c$ יחידה (כלומר, אין שתי נקודות שונות בקטע $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ עבורן $\tan(x)=x$).

5. נביט בסדרה המוגדרת על ידי כלל הנסיגה $a_{n+1}=a_n{}^2+1$, ותנאי ההתחלה $0<a_1$.

א. הוכיחו כי $a_n$ מונוטונית עולה.

ב. מצאו את $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$.