פונקציות מרוכבות
תרגיל 2 – פתרון

1. חשבו את הגבולות של הסדרות הבאות (אם הם קיימים)

א. $z_n = \frac{n-1}{n} + \frac{2i}{n}$

פתרון :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n-1}{n} = 1$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2}{n} = 0$$

ולכן $\lim_{n\to\infty} z_n = 1$.

ב. $z_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n + \left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n} i$

פתרון :

$$\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$$

$$\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n} = e^{-1}$$

ולכן $\lim_{n\to\infty} z_n = e + ie^{-1}$

ג. $z_n = n\sin\left(\pi n + \frac{1}{n}\right) - i\cos \pi n$

פתרון :

$$\lim_{n\to\infty} n\sin\left(\pi n + \frac{1}{n}\right) =$$

לא קיים , כי עבור $n = 2k$ נקבל

$$\lim_{k\to\infty} 2k\sin\left(2\pi k + \frac{1}{2k}\right) = \lim_{k\to\infty} 2k\sin\frac{1}{2k} = \lim_{k\to\infty} \frac{\sin\frac{1}{2k}}{\frac{1}{2k}} = 1$$

ועבור $n = 2k+1$ נקבל

$$\lim_{k\to\infty} (2k+1)\sin\left(2\pi k + \pi + \frac{1}{2k+1}\right) = \lim_{k\to\infty} -\frac{\sin\frac{1}{2k+1}}{\frac{1}{2k+1}} = -1$$

ולכן $\lim_{n\to\infty} z_n$ לא קיים.

ד. $z_n = \left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^n$

פתרון :

בסדרה זו 8 איברים שונים שכל הזמן חוזרים על עצמם , $z_k = e^{\frac{\pi}{4}ik}$, $k = 1,\ldots,8$ ולכן הגבול $\lim_{n\to\infty} z_n$ לא קיים .

2. כתבו את הפונקציות הבאות כפונקציות של משתנה z , כאשר $z = x + iy$

א. $f(z) = x - \frac{x}{x^2+y^2} + i\left(y + \frac{y}{x^2+y^2}\right)$

פתרון :

$$f(z) = x - \frac{x}{x^2+y^2} + i\left(y + \frac{y}{x^2+y^2}\right) = (x+iy) - \frac{(x-iy)}{x^2+y^2}$$

$$= z - \frac{\bar{z}}{|z|^2} = z - \frac{1}{z}$$

ב. $f(z) = \frac{x^2 - 2x - y^2 + 1}{(x-1)^2 + y^2} - \frac{2(x-1)y}{(x-1)^2+y^2} i$

פתרון :

$$f(z) = \frac{x^2 - 2x - y^2 + 1}{(x-1)^2 + y^2} - \frac{2(x-1)y}{(x-1)^2+y^2} i = \frac{x^2 - 2xyi - y^2}{(x-1)^2+y^2} + \frac{1 - 2x + 2yi}{(x-1)^2+y^2}$$

$$= \frac{(x-iy)^2}{(x-1)^2+y^2} + \frac{1 - 2(x-iy)}{(x-1)^2+y^2} = \frac{\bar{z}^2 - 2\bar{z} + 1}{|z-1|^2}$$

3. הגדירו את הפונקציה $f(z) = \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{2}\right) \cdot \frac{1}{z-2}$

בנקודה $z = 2$ כך שתהייה רציפה בנקודה זו.

פתרון :

$$\lim_{z\to 2} f(z) = \lim_{z\to 2}\left(\frac{2-z}{2z}\right) \cdot \frac{1}{z-2} = \lim_{z\to 2}\left(-\frac{1}{2z}\right) = -\frac{1}{4}$$

ולכן הפונקציה :

$$F(z) = \begin{cases} \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{2}\right) \cdot \frac{1}{z-2} & z \neq 2 \\ -\frac{1}{4} & z = 2 \end{cases}$$

רציפה ב- $z = 2$.

4. מצאו את כל הנקודות בהן הפונקציות הבאות $\mathbb{C}$-גזירות , וכן את התחומים בהם הפונקציות אנליטיות :

א. $f(z)=x^2+iy^2 \quad (z=x+iy)$

פתרון :

$$f(z)=x^2+iy^2$$
$$u(x,y)=x^2$$
$$v(x,y)=y^2$$

$\Leftarrow u(x,y),v(x,y)\in C^2\left(\mathbb{R}^2\right)$

$\Leftarrow u,v$ פונקציות דפרנציאביליות .

נבדוק משוואות CR :

$$\frac{\partial u}{\partial x}=2x \qquad \frac{\partial v}{\partial y}=2y$$
$$\frac{\partial u}{\partial y}=0 \qquad \frac{\partial v}{\partial x}=0$$

משוואות CR מתקיימות בנקודות (x,x) (ז"א $x=y$).

$\Leftarrow f(z)$ $\mathbb{C}$-גזירה בנקודות $z=re^{\left(\frac{\pi}{4}+\pi n\right)i}$ $(\forall r\ge 0, n\in\mathbb{Z})$, **ואינה** אנליטית בשום מקום .

ב. $f(z)=\bar{z}$

פתרון :

$f(z)=x-iy$ ולכן $\frac{\partial u}{\partial x}=1\neq\frac{\partial v}{\partial y}=-1$

$\Leftarrow$ משוואות קושי-רימן לא מתקיימות בשום נקודה $\Leftarrow f(z)$ אינה $\mathbb{C}$-גזירה ואינה אנליטית בשום מקום .

ג. $f(z)=z^2+\operatorname{Im} z$

פתרון :

$$f(z)=z^2+\operatorname{Im} z=(x+iy)^2+y=x^2-y^2+y+2ixy$$
$$\frac{\partial u}{\partial x}=2x \qquad \frac{\partial v}{\partial y}=2x$$
$$\frac{\partial u}{\partial y}=-2y+1 \qquad -\frac{\partial v}{\partial x}=-2y$$

מאחר ו- $\frac{\partial u}{\partial y}\neq-\frac{\partial v}{\partial x}$, $f(z)$ אינה $\mathbb{C}$-גזירה ואינה אנליטית בשום מקום .

ד. $f(z)=(z-1)(\operatorname{Re} z)^2$

פתרון :

$$f(z)=(z-1)(\operatorname{Re} z)^2=(x-1+iy)x^2=x^3-x^2+iyx^2$$

פונקציות $u(x,y)=x^3-x^2$ ו- $v(x,y)=yx^2$ דיפרנציאביליות בכל המישור .

נבדוק משוואות של קושי- רימן :

$$\frac{\partial u}{\partial x}=3x^2-2x \qquad \frac{\partial v}{\partial y}=x^2$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=0 \qquad -\frac{\partial v}{\partial x}=-2xy$$

מכאן

$$3x^2-2x=x^2 \Leftrightarrow 2x^2-2x=0 \Leftrightarrow 2x(x-1)=0 \Leftrightarrow x=0 \ or \ x=1$$

$$0=-2xy \Leftrightarrow x=0 \ or \ y=0$$

ולכן הפונקציה $\mathbb{C}$-גזירה בכל הנקודות מהצורה $(0,y)$ לכל $y\in\mathbb{R}$ (ז"א על ציר ה- y) וב- $(1,0)$, אבל אינה אנליטית בשום מקום מאחר ולאף נקודה אין סביבה בה הפונקציה $\mathbb{C}$-גזירה בכל הנקודות.

5. תהי $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ פונקציה $\mathbb{C}$-גזירה בתחום D וכן $f(z)$ מקיימת את התנאי $u^2(x,y)=v(x,y)$ ב- D. הוכיחו כי $f(z)$ קבועה ב- D.

הוכחה :

f $\mathbb{C}$ - גזירה ב D ולכן מקיימת משוואה CR ב- D .

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}$$

ולפי הנתון : $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial (u^2)}{\partial y}$

ז"א

$$1)\ \ \frac{\partial u}{\partial x}=2u\frac{\partial u}{\partial y}$$

מהמשוואה השנייה של CR נובע $\frac{\partial u}{\partial u}=-\frac{\partial v}{\partial x}$

ז"א

$$2)\ \ \frac{\partial u}{\partial y}=-2u\frac{\partial u}{\partial x}$$

נציב 2) ב – 1)

$$\frac{\partial u}{\partial x}=2u\cdot\left(-2u\frac{\partial u}{\partial x}\right)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}\left(1+4u^2\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{\partial u}{\partial x}=0 \quad \Leftrightarrow \quad u=h(y)$$

ז"א פונקציה u היא פונקציה של y בלבד .

נחזור ל – 1)

$$\frac{\partial u}{\partial x}=2u\frac{\partial u}{\partial y}$$

ולכן

$$0=2h(y)h'(y)$$

$\Leftrightarrow \quad \frac{d\left(h^2\right)}{dy}=0$ או $\Leftrightarrow h^2\left(y\right)=c \Leftrightarrow h\left(y\right)=const$

ז"א $f\left(z\right)=const+iconst^2$

ז"א $f\left(z\right)$ קבועה מש"ל.