תרגול 7:

חבורת המנה:

משפט: תהי $H \lhd G$ קבוצת המחלקות $\{aH \mid a\in G\}$ עם כפל מחלקות: $aHbH = abH$ מהווה חבורה.

כלומר לקחנו תת-חבורה נורמלית ויצרנו בעזרתה ובעזרת החבורה המקורית חבורה חדשה חבורה זו נקראת **חבורת המנה**. איבר היחידה של החבורה הוא H, וההפכי של aH הוא $a^{-1}H$. **חבורת המנה** תסומן ע"י G/H.

בהוכחת המשפט יש להראות שהכפל מוגדר היטב. מה הכוונה? שפעולת הכפל היא חד ערכית, כלומר אם $aH = cH, bH = dH$ אזי $aHbH = cHdH$.

תרגיל בית: הראו שהכפל מוגדר היטב ע"פ תכונות של מחלקות שמאליות.

הערה: שימו לב שהגדרת הכפל הזאת הגיונית רק במקרה ש H נורמלית ב G, אחרת כלל לא ודאי שמתקיים $aHbH = abH$.

תרגיל בית: מצאו חבורה G ותת חבורה H כך שכפל של שתי מחלקות שמאליות אינו מחלקה שמאלית.

משפט: $|G/H| = [G:H] = \frac{|G|}{|H|}$

תרגיל: מצאו את כל חבורות המנה של החבורה $\mathbb{Z}_6$.

פתרון: כל תת-חבורה היא נורמלית כי $\mathbb{Z}_6$ אבלית. כל התת-חבורות הן: $\mathbb{Z}_6, 3\mathbb{Z}_6 = \{0,3\}, 2\mathbb{Z}_6 = \{0,2,4\}, \{0\}$.

$\mathbb{Z}_6/\mathbb{Z}_6 = \{\mathbb{Z}_6\}$, כלומר המנה היא החבורה הטריויאלית, כיוון ש $0+\mathbb{Z}_6 = \mathbb{Z}_6, ..., 5+\mathbb{Z}_6 = \mathbb{Z}_6$.

$\mathbb{Z}_6/2\mathbb{Z}_6 = \{2\mathbb{Z}_6, 1+2\mathbb{Z}_6\}$ כיוון ש $0\equiv 2\equiv 4 \pmod{2\mathbb{Z}_6},\ 1\equiv 3\equiv 5 \pmod{2\mathbb{Z}_6}$.

$\mathbb{Z}_6/3\mathbb{Z}_6 = \{3\mathbb{Z}_6, 1+3\mathbb{Z}_6, 2+3\mathbb{Z}_6\}$ כיוון ש $0\equiv 3 \pmod{3\mathbb{Z}_6},\ 1\equiv 4 \pmod{3\mathbb{Z}_6},\ 2\equiv 5 \pmod{3\mathbb{Z}_6}$.

$\mathbb{Z}_6/\{0\} = \{0+\{0\}, 1+\{0\}, 2+\{0\}, ..., 5+\{0\}\}$.

הערה: שימו לב: כאשר אנו מדברים על תת-חבורות, טבעי לרשום שרשרת של הכלות של תתי-חבורות בצורה $H \le K \le J \le ... \le G$. אין בעיה בצורת רישום זאת, כיוון שיחס $\le$ ("תת-חבורה של") הוא יחס טרנזיטיבי. כלומר למעלה $H \le K$ וגם $K \le J$ ולכן $H \le J$. כשאנחנו משתמשים ברישום דומה עבור תח"נ (

$G \triangleleft ... \triangleleft J \triangleleft K \triangleleft H$) צריך מאד להזהר, כיוון שיחס $\triangleleft$ אינו טרנזיטיבי. כלומר אם $K \triangleleft H \triangleleft G$ לא מובטח ש $K \triangleleft G$.

משפט: אם $K \triangleleft H \triangleleft G$ וגם $K \triangleleft G$ אזי $|G/K| = |G/H||H/K|$.

תרגיל:

הראו ש $\mathbb{R}^*/\mathbb{R}^{*2}$ היא חבורה סופית.

הוכחה:

נרצה לבדוק "מהי" חבורת המנה $\mathbb{R}^*/\mathbb{R}^{*2}$ (כלומר אם אנחנו יכולים לזהות אותה – עד כדי איזומורפיזם – עם חבורה אחרת שאנו מכירים). ע"מ לעשות זאת נרצה לראות מיהן המחלקות השונות של $\mathbb{R}^*/\mathbb{R}^{*2}$. נזכור ששני איברים a,b הם שקולים במנה אם ורק אם $b^{-1}a = \frac{a}{b} \in \mathbb{R}^{*2}$. נשים לב ש $\mathbb{R}^{*2} = \mathbb{R}^{*>0}$ (המספרים הממשיים החיוביים), ולכן נסיק ששני איברים הם שקולים אם הם בעלי אותו סימן , לכן יש רק שתי מחלקות שקילות, האיברים החיוביים והאיברים השליליים. כבר ראינו שהחבורה היחידה עם שני איברים היא $\mathbb{Z}_2$ ולכן $\mathbb{R}^*/\mathbb{R}^{*2} \cong \mathbb{Z}_2$.

תרגיל ממבחן תשס"ז, מועד ב':

א. הוכיחו שלחבורת המנה $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ אין תת-חבורה איזומורפית ל- $\mathbb{Z}$.

ב. הוכיחו שהחבורה $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ אינה נוצרת סופית.

ג. הראו כי התת-חבורה הנוצרת (במנה) על-ידי $\frac{1}{4}$ ו $\frac{1}{6}$ היא ציקלית.

פתרון:

א. כל איבר ב $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ הוא מהצורה $\frac{m}{n}+\mathbb{Z}$. האיבר $\frac{m}{n}+\mathbb{Z}$ הוא מסדר שמחלק את n, כיוון ש $n(\frac{m}{n}+\mathbb{Z}) = \frac{nm}{n}+\mathbb{Z} = m+\mathbb{Z} = \mathbb{Z}$. לכן כל האיברים ב- $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ הם מסדר סופי, ואם היתה ת"ח איזומורפית ל $\mathbb{Z}$ אזי היה איבר מסדר אינסופי היוצר אותה.

ב. כיוון שכל איבר בחבורה הוא מסדר סופי, והחבורה היא אבלית, נקבל שהת"ח הנוצרת מקבוצה סופית של איברים היא סופית, וב- $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ יש אינסוף איברים (לדוגמא $\{\frac{1}{2^n}+\mathbb{Z} \mid n\in\mathbb{N}\}$, **הראו שכל האיברים בקבוצה שונים זה מזה**).

ג. עבור חבורה אבלית מתקיים $<a,b>=\{a^m b^n \mid m,n\in\mathbb{Z}\}$. עבור חבורה בכתיב חיבורי נקבל $<a,b>=\{ma+nb \mid m,n\in\mathbb{Z}\}$. תחילה נסתכל על $\frac{1}{4}$ ו $\frac{1}{6}$ כאיברים ב $\mathbb{Q}$:

$<\frac{1}{4},\frac{1}{6}>=m\frac{1}{4}+n\frac{1}{6}=\frac{3m+2n}{12}=\frac{1}{12}\mathbb{Z}=<\frac{1}{12}>$ (השתמשנו כאן בתכונה $a\mathbb{Z}+b\mathbb{Z}=\gcd(a,b)\mathbb{Z}$). אם נסמן $[\frac{1}{4}]=\frac{1}{4}+\mathbb{Z}$, נקבל

$<\left[\frac{1}{4}\right],\left[\frac{1}{6}\right]>=\left[<\frac{1}{4},\frac{1}{6}>\right]=\left[<\frac{1}{12}>\right]=<\left[\frac{1}{12}\right]>=\{0,\frac{1}{12},\frac{2}{12},...,\frac{11}{12}\}$.

<u>**תרגיל**</u>: תהי G חבורה ונניח ש $H\le Z(G)$ וגם G/H ציקלית. הוכיחו ש G אבלית.

<u>**פתרון**</u>: כיוון ש G/H ציקלית קיים $g\in G$ כך ש $G/H=<gH>$. אזי מתקיים $G=\bigcup_{n\in\mathbb{Z}} g^n H$ (איחוד זר).
נניח ש $x,y\in G$ אזי $x=g^{n_1}h_1, y=g^{n_2}h_2$. אזי $xy=g^{n_1}h_1g^{n_2}h_2=...=g^{n_2}h_2g^{n_1}h_1=yx$.

<u>**משפטי איזומורפיזם**</u>

<u>**משפט איזומורפיזם 1:**</u> תהיינה G,H חבורות ותהי $\varphi:G\to H$ אפימורפיזם אז $G/\ker\varphi\cong H$.

אם φ היא הומומורפיזם (לא בהכרח אפימורפיזם) אז $G/\ker\varphi\cong \operatorname{Im}\varphi$.

<u>**משפט:**</u> כל ת"ח נורמלית היא גרעין של הומומורפיזם.

<u>**הוכחה:**</u> ההומ' הוא $\pi:G\to G/N$ המוגדר ע"י $\pi(g)=gN$.

הומומורפיזם זה נקרא **ההומומורפיזם הטבעי**. בדקו: π הוא אפימורפיזם, והגרעין הוא N.

<u>**מסקנה:**</u> כל תמונה של הומ' היא מנה של חבורת התחום.

<u>**דוגמאות:**</u>

1. $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}\cong\mathbb{Z}_n$. ניתן לראות זאת ממשפט האיזו' הראשון:

נגדיר $\varphi:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}_n$ ע"י $\varphi(x)=x\ (\bmod n)$. בדקו ש $\varphi:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}_n$ אפימורפיזם, והגרעין הוא בדיוק $n\mathbb{Z}$.

2. יהיו $m,n\in\mathbb{N}$ כך ש $m\mid n$. אזי: $\mathbb{Z}_n/m\mathbb{Z}_n\cong\mathbb{Z}_m$. נגדיר $\varphi:\mathbb{Z}_n\to\mathbb{Z}_m$ ע"י $\varphi(x)=x(mod\ m)$. נראה שההומ' מוגדרת היטב: מה הכוונה? יש להראות שהפונקציה חד-ערכית. יש להראות שאם $x\equiv y(\bmod n)$ אזי $\varphi(x)\equiv\varphi(y)\ (\bmod m)$. אבל $x\equiv y(\bmod n)\Leftrightarrow n\mid(x-y)$, וכיוון ש $m\mid n$, נקבל ש $x\equiv y(\bmod n)\Rightarrow m\mid(x-y)\Rightarrow x\equiv y\ (\bmod m)\Rightarrow\varphi(x)\equiv\varphi(y)\ (\bmod m)$. הגרעין של ההעתקה הזאת הוא בדיוק $m\mathbb{Z}_n$.נשים לב שאם $m\nmid n$ אז לא ניתן להגדיר הומ' כנ"ל. לדוגמא ננסה להגדיר $\varphi:\mathbb{Z}_7\to\mathbb{Z}_3$, אזי $2=\varphi(8)\not\equiv\varphi(1)=1\ (\bmod 3)$.

<u>**תרגיל:**</u> הוכח כי $(\mathbb{R}^*)^+\cong\mathbb{C}^*/S^1$ כאשר $S^1:=\{z\in\mathbb{C}^*\mid |z|=1\}$

<u>**הוכחה:**</u> הרעיון של ההוכחה: מגדירים הומ' בין $(\mathbb{R}^*)^+$ ל $\mathbb{C}^*$ כך ש S^1 הגרעין וכך בעזרת משפט האיזו' 1 מוכיחים את הטענה.

נגדיר העתקה מ $\varphi:\mathbb{C}^*\to(\mathbb{R}^*)^+$ ע"י: $\varphi(z)=|z|$.

$$\ker\varphi=\{z\in\mathbb{C}^*\mid\varphi(z)=|z|=1\}=S^1$$

כעת כדי להוכיח את הטענה נשאר רק להוכיח ש φ אפימורפיזם:

1. הומ': $\varphi(z_1z_2)=|z_1z_2|=|z_1||z_2|=\varphi(z_1)\varphi(z_2)\qquad\forall z_1,z_2\in\mathbb{C}^*$.
2. אפי': φ היא על כי $\varphi(r)=r\qquad\forall r\in(R^*)^+$ לכן φ היא על.

והוכחנו ש φ היא אפימורפיזם ולכן לפי משפט האיזומורפיזם 1 נקבל $(\mathbb{R}^*)^+\cong\mathbb{C}^*/S^1\ \square$

<u>**תרגיל:**</u>

$N\lhd G$ ויהי $a\in G$ איבר מסדר סופי. הוכח כי הסדר של $aN\in G/N$ מחלק את הסדר של a .

<u>**הוכחה:**</u> ניתן לבדוק זאת ישירות, או: מיידי מההומ' הטבעי: $\pi(a)=aN$ וידוע שסדר התמונה מחלק את סדר המקור (ראינו בתרגול קודם).

<u>תרגיל:</u>

תהי $G=GL_n(\mathbb{C})$ החבורה של המטריצות ההפיכות מסדר $n\times n$ מעל שדה המורכבים. נגדיר:

$A=\{M\in G\,|\,|\det M|=1\}$. הוכיחו ש- $A\triangleleft G$ ו- G/A אבלית.

<u>פתרון:</u>

נגדיר $\varphi:GL_n(\mathbb{C})\to\mathbb{R}^{*+}$ ע"י $\varphi(x)=|\det(x)|$.

$\varphi(xy)=|det(xy)|=|det(x)\det(y)|=|det(x)||\det(y)|=\varphi(x)\varphi(y)$. הגרעין הוא בדיוק A.

שני איברים מתחלפים אם ורק אם הקומוטטור שלהם $[x,y]:=x^{-1}y^{-1}xy=e$. כעת נשים לב שעבור $x,y\in G$ מתקיים:

$$det(x^{-1}y^{-1}xy)=\det(x^{-1})\det(y^{-1})\det(x)\det(y)=\det(x^{-1})\det(x)\det(y^{-1})\det(y)=$$
$$=\det(x^{-1}x)\det(y^{-1}y)=\det(I)\det(I)=1$$

לכן $[x,y]\in A$ כלומר $[x,y]\equiv I\ (\text{mod}\,A)$ ובגלל שמתקיים $[x,y](\text{mod}\,A)=[x(\text{mod}\,A),y(\text{mod}\,A)]$, נקבל שכל שני איברים במנה מתחלפים.

<u>משפט ההתאמה:</u>

יהי $\varphi:G\to H$ אפימורפיזם. נסמן $K:=Ker\varphi$.

קיימת התאמה חח"ע (פונקציה חח"ע ועל) בין התת-חבורות של H לבין התת-חבורות של G המכילות את הגרעין. התאמה זאת שומרת על יחס סדר הכלה ממש, כלומר $K\le H_1<H_2\le G$ אם ורק אם $\varphi(H_1)<\varphi(H_2)\le H$.

קיימת התאמה חח"ע בין התח"נ של H לבין התח"נ של G, וגם כאן נשמר יחס סדר ההכלה.

<u>דוגמא:</u>

נראה שוב שכל התת"ח של $\mathbb{Z}_n$ הן מהצורה $m\mathbb{Z}_n$ כאשר m|n. $\mathbb{Z}_n$ היא תמונה אפימורפית של $\mathbb{Z}$ ע"י ההומ' $\varphi(x)=x(\text{mod}\,n)$. הגרעין הוא $n\mathbb{Z}$.

לכן לפי משפט ההתאמה, יש התאמה חח"ע בין התת"ח של $\mathbb{Z}$ המכילות את $n\mathbb{Z}$ לבין התת"ח של $\mathbb{Z}_n$. אנחנו כבר מכירים את כל התת"ח של $\mathbb{Z}$, ואם ת"ח כזאת מכילה את $n\mathbb{Z}$ אזי בהכרח היא מהצורה $m\mathbb{Z}$ כאשר m|n, ויש בדיוק אחת כזאת לכל מחלק.