פונקציות מרוכבות – פתרון תרגיל 3

1. נסמן $U(x,y)=\operatorname{Re} f(z)=u(x+y), V(x,y)=\operatorname{Im} f(z)=-u(x-y)$.

נחשב נגזרות חלקיות לפי כלל השרשרת:

$$U_x=u'(x+y), U_y=u'(x+y), V_x=-u'(x-y), V_y=+u'(x-y)$$

תהי $(x_0,0)$ נקודה כללית על ציר ה-x. מתקיים שם:

$U_x(x_0,0)=u'(x_0)=V_y(x_0,0)$ וגם $U_y(x_0,0)=u'(x_0)=-V_x(x_0,0)$. כלומר תנאי קושי רימן מתקיים על הציר הממשי. מאחר והפונקציות U,V גזירות ברציפות, נסיק כי $f(z)$ גזירה (במובן המרוכב) על הציר הממשי.

2. $f(x+iy)=\frac{x^3}{3}+y+i\left(\frac{y^3-x^3}{3}\right)$.

3. נסתכל על הפונקציה האנליטית $g(z)=f^2(z)=u^2-v^2+2iuv$. נתון כי $\operatorname{Re} g(z)$ קבוע, ולכן $g(z)$ בעצמה היא קבועה (את זה קל להוכיח עם CR). ז"א שקיים איזה $\alpha\in\mathbb{C}$ קבוע כך ש-$f^2(z)\equiv\alpha$. ומכאן שלכל z, $f(z)=\sqrt{\alpha}$ או $f(z)=-\sqrt{\alpha}$. אם $\alpha=0$ מקבלים כי f קבועה ושווה לאפס. אחרת, אם $\alpha\neq 0$, יש רק שתי אפשרויות עבור $f(z)$ והן $\pm\sqrt{\alpha}$. במקרה הזה לא יכולות להתקבל שתיהן יחדיו, כי פונקציה רציפה שתמונתה מכילה שני ערכים שונים היא בעלת תמונה לא בת מנייה. (אינטואיטיבית f תהיה מוכרחה לקבל ערכים נוספים "בדרך" בין $\sqrt{\alpha}$ לבין $-\sqrt{\alpha}$)

4. נניח בשלילה כי $f(z)=\bar{z}e^{-17z^2}$ גזירה בנקודה כלשהי $z_0\in\mathbb{C}$. אם כך הפונקציה $g(z)=f(z)\cdot e^{+17z^2}$ תהיה גם היא גזירה בנקודה זו, ככפל בין שתי פונקציות גזירות. אבל $g(z)=\bar{z}$ - ולצמוד אין נקודות שבהן יש נגזרת. זו סתירה, ולכן אין נקודות שבהן f גזירה.

5. אם $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ אז $\overline{f(\bar{z})}=u(x,-y)-iv(x,-y)$. נסמן $U(x,y)=\operatorname{Re}\overline{f(\bar{z})}=u(x,-y), V(x,y)=\operatorname{Im}\overline{f(\bar{z})}=-v(x,-y)$. נחשב נגזרות חלקיות ע"פ כלל השרשרת. (נשתמש במשוואות CR עבור u,v)

$U_x(x,y)=u_x(x,-y)=v_y(x,-y)=V_y(x,-y)$ ובאופן דומה גם $U_y=-V_x$. כלומר $\overline{f(\bar{z})}$ מקיימת את CR בכל העיגול $|z|<R$ ולכן גם היא גזירה שם (יש לציין שגם $U,V\in C^1$ כמו u,v).