

בוחן אלגברה לינארית למהנדסים תשעט סמסטר א'

מתרגלים: אחיה בר־און, עוזי חרוש, הראל רוזנפלד, יעל רוזנשטרק.

- ענו על כל השאלות. יש לנמק כל תשובה!!
 - על כל דף תשובה רשמו ת.ז. ואת שמכם המלא. (על מחברת בחינה ממדור בחינות מספיק למלא רק בעמוד הראשון.)
 - הקפידו על סדר ניקיון.
 - משך הבוחן: שעה וחצי.
 - חומר עזר: מחשבון פשוט בלבד.
 - השאלות לא מסודרות בהכרח לפי רמת קושי – מומלץ להתחיל עם שאלות אותן אתם יודעים לפתור.
- המלצה: הסתכלו על כל השאלות והתחילו עם השאלות שעליהן אתם יודעים לענות.
- חלקו את זמנכם בתבונה!

Q1	
Q2	
total	

בהצלחה!

1. נגדיר

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$$

ונגדיר

$$W_1 = \{x \in \mathbb{R}^4 : Ax = 0\}, W_2 = C(A)$$

(כלומר W_2 הוא מרחב העמודות של A).

(א) מצאו מטריצה B כך ש $W_2 = \{x \in \mathbb{R}^4 : Bx = 0\}$

פתרון:

רואים כי עמודה 1 שווה לעמודה 4 וכן עמודה 2 שווה לעמודה 3. בנוסף רואים כי עמודה 1 ועמודה 2 בת"ל

$$W_2 = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\text{כעת } \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \in W_2 \text{ אם ומ"מ יש פתרון למערכת } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ נדרג}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & a \\ 1 & -2 & -2 & 1 & b \\ 2 & -1 & -1 & 2 & c \\ 1 & -2 & -2 & 1 & d \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & a \\ 0 & -2 & -2 & 0 & b-a \\ 0 & -1 & -1 & 1 & c-2a \\ 0 & -2 & -2 & 0 & d-a \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & a \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 2a-c \\ 0 & -2 & -2 & 1 & b-a \\ 0 & -2 & -2 & 0 & d-a \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & a \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 2a-c \\ 0 & 0 & 0 & 1 & b-2c+3a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & d-2c+3a \end{array} \right)$$

לכן

$$W_2 = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} : (b-2c+3a=0) \wedge (d-2c+3a) \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 & 0 \\ 3 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

אם נגדיר $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 & 0 \\ 3 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ נקבל את המבוקש.

(ב) מצאו בסיס ל $W_1 \cap W_2$.

פתרון:

מתקיים כי

$$W_1 \cap W_2 = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

ולכן נדרג את $\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & -2 & 0 \\ 3 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ומכאן ש

$$W_1 \cap W_2 = \left\{ \begin{pmatrix} -t \\ t \\ -t \\ t \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R}^4 \right\} = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

2. תהא $A \in \mathbb{R}^{4 \times 6}$. מתרגל החליט לדרג את המטריצה A . במהלך דירוגו הוא הגיע למטריצה

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

מה מהבאים בהכרח נכון (עבור סעיפים נכונים - הוכיחו. עבור סעיפים שאינם נכונים - הפריכו):

(א) $\text{rank}(A) = 3$

פתרון:

נכון. מרחב השורות לא מתקלקל בדירוג ולכן $\text{rank}(A) = \dim R(A) = \dim R(B)$. כיוון ש B מדורגת, מימד $R(B)$ שווה למספר השורות שונות מאפס ששווה ל 3.

(ב) $C_3(A), C_4(A), C_5(A)$ בת"ל

(כאשר $C_3(A)/C_4(A)/C_5(A)$ היא עמודה השלישית/הרביעית/החמישית של A (בהתאמה)).

פתרון:

נכון. נסמן ב E את המטריצה המדרגת את A ל B , כלומר $EA = B$. לפי כפל עמודה, נקבל כי $C_i(B) = C_i(EA) = E \cdot C_i(A)$ עבור $i \in \{3, 4, 5\}$. כעת יהא $\alpha_1 C_3(A) + \alpha_2 C_4(A) + \alpha_3 C_5(A) = 0$ צירוף לינארי שמתאפס ונראה שהוא הצירוף הלינארי הטריוויאלי. כיוון ש E הפיכה נקבל $C_i(A) = E^{-1} C_i(B)$ עבור $i \in \{3, 4, 5\}$ ולכן

$$\alpha_1 E^{-1} C_3(B) + \alpha_2 E^{-1} C_4(B) + \alpha_3 E^{-1} C_5(B) = 0$$

נכפיל את השיוון ב E משמאל ונקבל

$$\alpha_1 C_3(B) + \alpha_2 C_4(B) + \alpha_3 C_5(B) = 0$$

נראה כי $C_3(B), C_4(B), C_5(B)$ בת"ל וזה יגרור כי $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$ כנדרש. אכן נדרג את המטריצה שעמודותיה הן $C_3(B), C_4(B), C_5(B)$ ונקבל

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -8 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -8 \\ 0 & 0 & -9 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

כיוון שיש 3 איברים מובילים בצורה מדרגת נקבל שאכן $C_3(B), C_4(B), C_5(B)$ בת"ל.

$$R_1(A), R_2(A), R_3(A), \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ -1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (ג)$$

(כאשר $R_1(A)/R_2(A)/R_3(A)$ היא השורה הראשונה/השנייה/השלישית של A (בהתאמה)).
פתרון:

$$R_1(A), R_2(A), R_3(A), R_1(B) = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ -1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \in R(A) = R(B) \text{ לכן } R(A) = R(B)$$

$R(A)$ וקיבלנו 4 וקטורים במרחב מימד 3 ולכן הם ת"ל.

(ד) המטריצה AA^t אינה הפיכה (כאשר A^t היא המטריצה המשוחלפת של A).

פתרון:

המטריצה $AA^t \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$ ומתקיים כי $rank(AA^t) \leq rank(A) = 3$ ולכן המטריצה אינה הפיכה.

$$Ax = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (ה) \text{ למערכת.}$$

פתרון:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \text{ לא נכון. למשל עבור } A \text{ מתקיים כי } B \text{ היא צורה מדרגת שלה (ע"י)}$$

החלפת השורות 3 ו 4 ומתקיים כי יש פתרון למערכת $Ax = b$, כאשר $b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, כיוון שאחרי דירוג של המטריצה $(A|b)$ מקבלים

$$(A|b) \rightarrow \left(\begin{array}{cccccc|c} 2 & 2 & 2 & -1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

שאין בה שורת סתירה.

$$(n) \quad C_6(A), \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ ת"ל } C_6(A) \text{ (כאשר } C_6(A) \text{ היא העמודה השישית של } A).$$

פתרון:

נכון. נסמן ב E את המטריצה המדרגת את A ל B , כלומר $EA = B$. לפי כפל עמודה, נקבל כי $C_6(B) = C_6(EA) = E \cdot C_6(A)$ נכפיל את השיוון ב E^{-1} משמאל ונקבל

$$C_6(A) = E^{-1}C_6(B) = E^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ולכן $C_6(A)$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ת"ל כי למשל $1 \cdot C_6(A) + 0 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ הוא צירוף לינארי לא טריוויאלי שמתאפס.