פתרון תרגיל בית מספר 6

<u>שאלה 3.5</u>

<u>סעיף ג':</u>

עבור $a \neq 1,2$ קיבלנו פתרון יחיד למערכת הלא הומוגנית ולכן אם $a \neq 1,2$ נקבל פתרון יחיד (טריויאלי) להומוגנית.

כש $a = 1$ קיבלנו אינסוף פתרונות למערכת הלא הומוגנית מהצורה $\{(1,t,-3) : t \in \mathbb{R}\}$. נבחר פתרון פרטי למערכת הלא הומוגנית למשל: $(1,0,-3)$. לכן כש $a = 1$ נקבל אינסוף פתרונות למערכת ההומוגנית מהצורה $\{(1,t,-3) : t \in \mathbb{R}\} - (1,0,-3) = \{(0,t,0) : t \in \mathbb{R}\}$.

<u>שאלה 5.3</u>

- היות ומתקיים $I = 1I$ (באשר 1 הוא איבר ניטרלי ביחס לכפל בשדה F), ניתן לראות כי כל מטריצת יחידה היא מטריצה סקלרית. מצד שני, מטריצת האפס היא מטריצה סקלרית (מדוע?) אך היא אינה מטריצת היחידה.
- כל מטריצה סקלרית היא מהצורה αI , ובפרט הרכיב ה ij שלה (עבור $i \neq j$) הוא $\alpha \cdot 0 = 0$; לכן מטריצה סקלרית היא מטריצה אלכסונית. מצד שני, עבור $n > 1$ נסתכל על המטריצה האלכסונית שאיבריה על האלכסון הם $a_{11} = 1$, $a_{ii} = 0, \forall i \neq 1$ ונראה כי זו לא מטריצה סקלרית.
- כל מטריצה אלכסונית היא משולשית עליונה (היות ומתחת לאלכסון יש אפסים) וגם משולשית תחתונה (כי מעל לאלכסון יש אפסים), ובפרט היא משולשית. מצד שני, נוכל לבחור (למשל) מטריצה שהינה משולשית עליונה כך שאחד האיברים מתחת לאלכון הוא 1 . זו תהיה מטירצה משולשית שאינה אלכסונית.

<u>שאלה 5.6</u>

נראה שכל המטריצות האלכסוניות מתחלפות ושלא כל המשולשיות מתחלפות.

א. אם A,B אלכסוניות נראה ש- $AB = BA$

עבור $i \neq j$

$$(ab)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj} = \left(\sum_{k=1, k\neq i}^{n} a_{ik}b_{kj} \right) + a_{ii}b_{ij} = \left(\sum_{k=1, k\neq i}^{n} 0b_{kj} \right) + a_{ii}b_{ij} = a_{ii} \cdot 0 = 0$$

עבור $i = j$

$$(ab)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj} = \sum_{\substack{k=1 \\ k\neq i}}^{n} a_{ik}b_{kj} + a_{ii}b_{ij} = \sum_{\substack{k=1 \\ k\neq i}}^{n} 0b_{kj} + a_{ii}b_{ij} = a_{ii} \cdot b_{ii}$$

קל לראות שאם נבצע את הכפל ההפוך נקבל אותה תוצאה (צריך רק לשים לב לכך ש $a_{ii}b_{ii} = b_{ii}a_{ii}$ בשדה).

ב. נראה מטריצות משולשיות לא מתחלפות אפילו במטריצות מסדר 2×2.

דוגא נגדית: מחד, מתקיים $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ומאידך, $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

<u>שאלה 5.11</u>

א.

אם $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $B = A^t \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $C = AA^t \in \mathbb{R}^{m\times m}$ אז:

$$tr\left(AA^t\right) = tr(C) = \sum_{i=1}^{m} c_{ii} \underset{(1)}{=} \sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{ki} \underset{(2)}{=} \sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} a_{ik}a_{ik} = \sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} a_{ik}{}^2$$

בשוויון (1) השתמשנו בנוסחא לכפל מטריצות. בשוויון (2) השתמשנו בכך שאם $B = A^t$ אזי $b_{ki} = a_{ik}$.

כעת, עפ"י הנתון $tr\left(AA^t\right) = 0$. לכן, $\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} a_{ik}{}^2 = 0$ אבל אז בהכרח

$\forall(1 \le i \le m, 1 \le k \le n) \quad a_{ik} = 0,$ (אחרת $\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} a_{ik}{}^2 > 0$) ומכאן A מטריצת האפס.

ב. הפתרון של סעיף זה דומה מאוד לסעיף הקודם:

$tr\left(AA^*\right) = tr(C) = \sum_{i=1}^{m} c_{ii} \underset{(1)}{=} \sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} a_{ik}\overline{b}_{ki} \underset{(2)}{=} \sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} a_{ik}\overline{a}_{ik} = \sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} \left|a_{ik}\right|^2$, ויש לשים לב שבמספרים

מרוכבים מתקיים: $|z| = 0 \;\Rightarrow\; z = 0$