תורת הקבוצות תרגיל בית 7

1. הוכיחו: הטענה הבאה שקולה ללמה של צורן: אם $\langle A,<\rangle$ היא קבוצה סדורה חלקית לא ריקה שלכל שרשרת עולה בה יש חסם מלעיל, אז לכל $a \in A$ יש $b \in A$ מקסימלי כך ש: $a \leq b$.

2. הוכיחו: תהי $(P,<)$ קבוצה סדורה בסדר מלא. אזי יש בתוכה תת קבוצה קופינלית $A \subseteq P$ כך ש $(A,<)$ סדורה היטב.

3. הוכיחו את הלמה של תוכי:
תהי D קבוצה לא ריקה של קבוצות, כך ש $B \in D$ אמ"ם כל תת קבוצה סופית של B היא איבר בD. אזי, יש בD איבר מקסימלי ביחס להכלה.

4. הוכיחו שקיימת קבוצה S של מספרים ממשיים המקיימת:
א. לכל $a \neq b \in S$, $a-b$ אי רציונלי.
ב. לכל $a \notin S$ יש $b \in S$ כך ש $a-b$ רציונלי.

5. הוכיחו ישירות כי הלמה של צורן גוררת את אקסיומת הבחירה.
רמז: הוכחנו בכיתה כי אקסיומת הבחירה שקולה לקיומה של קבוצה בוחרת, לכן מספיק להוכיח שהלמה של צורן גוררת את הטענה הבאה:
לכל S קבוצה של קוצות לא ריקות וזרות בזוגות, קיימת $A \subseteq S$ כך ש $|A \cap X| = 1$ לכל $X \in S$.