מבחן מועד א' – מבוא לאנליזה 1 למורים –88-611 – 25/01/22

זמן המבחן: 3 שעות. חומר עזר: מחשבון פשוט בלבד. משקל כל שאלה 24 נק', ענו על כל השאלות.

1. חשבו את הגבולות הבאים:

א. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin(1+x)\sin(x)\ln(1+x)}{1-\cos(x)}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(1+x)\sin(x)\ln(1+x)}{1-\cos(x)}=\lim_{x\to 0}\sin(1+x)\cdot\frac{\sin(x)}{x}\cdot\frac{\ln(1+x)}{x}\cdot\frac{x^2}{1-\cos(x)}=\sin(1)\cdot 1\cdot 1\cdot 2=2\sin(1)$$

ב. $\lim\limits_{x\to(-\infty)}\frac{\sqrt{x^4+x^3+1}-x^2}{x+1}$

$$\lim_{x\to(-\infty)}\frac{\sqrt{x^4+x^3+\ 1}-x^2}{x+1}=\lim_{x\to(-\infty)}\frac{(x^4+x^3+\ 1)-x^4}{(x+1)\left(\sqrt{x^4+x^3+\ 1}+x^2\right)}=\lim_{x\to(-\infty)}\frac{x^3+1}{(x+1)\left(\sqrt{x^4+x^3+\ 1}+x^2\right)}=$$

$$=\lim_{x\to(-\infty)}\frac{x^3\left(1+\frac{1}{x^3}\right)}{x\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(\sqrt{x^4\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^4}\right)}+x^2\right)}=\lim_{x\to(-\infty)}\frac{x^3\left(1+\frac{1}{x^3}\right)}{x\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(x^2\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^4}}+x^2\right)}=$$

$$=\lim_{x\to(-\infty)}\frac{x^3}{x^3}\cdot\frac{1+\frac{1}{x^3}}{\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^4}}+1\right)}=\frac{1}{2}$$

הרחבה על התרגיל האחרון עם דוגמאות ותהליכים שונים:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^4+x^3+\ 1}+x^2}{x+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^4\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^4}\right)}+x^2}{x+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^4}}+x^2}{x+1}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\underbrace{\frac{x^2}{x}}_{x}\cdot\frac{\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^4}}+1}{1+\frac{1}{x}}=\{\infty\cdot 2\}=\infty$$

כעת עם לופיטל:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^4+x^3+\ 1}+x^2}{x+1}=\left\{\frac{\infty}{\infty},L'Hopital\right\}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{4x^3+3x^2}{2\sqrt{x^4+x^3+1}}+2x}{1}=\cdots$$

כעת עם כפל וחילוק בצמוד:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^4+x^3+1}+x^2}{x+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+1}{(x+1)\left(\sqrt{x^4+x^3+1}-x^2\right)}=\cdots$$

עכשיו נעשה על התרגיל המקורי מהמבחן הוצאת חזקה משמעותית:

$$\lim_{x\to(-\infty)}\frac{\sqrt{x^4+x^3+1}-x^2}{x+1}=\lim_{x\to(-\infty)}\frac{x^2}{x}\cdot\frac{\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^4}}-1}{1+\frac{1}{x}}=\{-\infty\cdot 0\}=\cdots$$

ג. $\lim_{n\to\infty}\frac{2^n}{n^2n!}$

$$a_n=\frac{2^n}{n^2n!}$$

נחשב את **גבול** המנה של הסדרה החיובית הזו

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{2^{n+1}}{(n+1)^2(n+1)!}\cdot\frac{n^2n!}{2^n}=2\cdot\frac{n^2}{n^2\left(1+\frac{1}{n}\right)^2}\cdot\frac{1}{n+1}\to\left\{2\cdot1\cdot\frac{1}{\infty}\right\}\to 0$$

כיוון ש**גבול** המנה קטן מ1, לפי כלל המנה הסדרה המקורית שואפת לאפס.

2. נביט בפונקציה $f(x)=\begin{cases}\frac{e^x-\sin(x)-1}{ax^2} & x\neq 0\\ a & x=0\end{cases}$

א. לאילו ערכי a הפונקציה $f(x)$ רציפה ב $x=0$?

לצורך רציפות צריך שהגבול בנקודה שווה לערך בנקודה.

$$\lim_{x\to0}\frac{e^x-\sin(x)-1}{ax^2}=\left\{\frac{0}{0},L'Hopital\right\}=\lim_{x\to0}\frac{e^x-\cos(x)}{2ax}=\left\{\frac{0}{0},L'Hopital\right\}=\lim_{x\to0}\frac{e^x+\sin(x)}{2a}=\frac{1}{2a}$$

הערה: ברור שעבור $a=0$ הפונקציה כלל אינה מוגדרת פרט לאפס ולכן אין גבול והיא אינה רציפה.

לכן הפונקציה תהא רציפה באפס אם ורק אם $a\neq 0$ וכן

$$a=\frac{1}{2a}$$

$$a^2 = \frac{1}{2}$$

$$a = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$$

ב. לאילו ערכי a הפונקציה $f(x)$ גזירה ב $x=0$? מהי $f'(0)$ במקרים אלה?

ראשית, כאשר הפונקציה אינה רציפה היא בוודאי אינה גזירה, ולכן ישר נפסול את כל ערכי a פרט לשני הערכים שמצאנו בסעיף א'.

נציב $a=\frac{1}{\sqrt{2}}$ ונבדוק האם הפונקציה גזירה ומהי נגזרתה באפס.

$$f'(0) = \lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{e^x-\sin(x)-1}{\frac{1}{\sqrt{2}}x^2}-\frac{1}{\sqrt{2}}}{x-0} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sqrt{2}(e^x-\sin(x)-1)}{x^2}-\frac{1}{\sqrt{2}}}{x} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sqrt{2}(e^x-\sin(x)-1)-\frac{1}{\sqrt{2}}x^2}{x^2}}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{2}(e^x-\sin(x)-1)-\frac{1}{\sqrt{2}}x^2}{x^3} = \left\{\frac{0}{0}, L'Hopital\right\} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{2}(e^x-\cos(x))-\frac{2}{\sqrt{2}}x}{3x^2} = \left\{\frac{0}{0}, L'Hopital\right\} = \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{2}(e^x+\sin(x))-\sqrt{2}}{6x} = \left\{\frac{0}{0}, L'Hopital\right\} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{2}(e^x+\cos(x))}{6} = \frac{2\sqrt{2}}{6} = \frac{\sqrt{2}}{3}$$

אם נציב $a=-\frac{1}{\sqrt{2}}$ נקבל מינוס אותה הפונקציה, ולכן גם היא גזירה ונגזרתה היא $-\frac{\sqrt{2}}{3}$

3. תהי סדרה המקיימת את כלל הנסיגה $a_{n+1}=\sqrt{a_n}$ לכל n, וכן $a_1=16$.

א. הוכיחו כי הסדרה a_n יורדת.

צ"ל שלכל n מתקיים כי

$$a_{n+1} \le a_n$$

נוכיח באינדוקציה במקרה זה (לא תמיד).

עבור $n=1$ צ"ל $a_2 \le a_1$ ואכן

$$a_2 = \sqrt{16} = 4 \le 16 = a_1$$

בהנתן n עבורו

$$a_{n+1} \leq a_n$$

צ"ל כי

$$a_{n+2} \leq a_{n+1}$$

צ"ל כי

$$\sqrt{a_{n+1}} \leq \sqrt{a_n}$$

זה נכון מהנחת האינדוקציה.

ב. חשבו את $\lim_{n\to\infty} a_n$.

הראנו שהסדרה יורדת, לכן יש שתי אפשרויות: או שהיא חסומה ומתכנסת למספר סופי, או שהיא אינה חסומה ושואפת למינוס אינסוף.

כיוון ש $a_{n+1} = \sqrt{a_n}$ וכן $a_1 = 16$ נובע כי לכל n מתקיים כי $a_n \geq 0$ ולכן הסדרה חסומה מלמטה.

לכן הסדרה מתכנסת לגבול סופי, נסמנו $a_n \to L$.

נשאיף את שני צידי נוסחאת הנסיגה

$$\lim a_{n+1} = \lim \sqrt{a_n}$$

$$L = \sqrt{L}$$

$$L^2 = L$$

$$L(L-1) = 0$$

לכן הגבול הוא אפס או אחד.

אנחנו נוכיח כי למעשה לכל n מתקיים כי $a_n > 1$ ולכן גם $L \geq 1$ ולכן $L = 1$.

גם את זה נוכיח באינדוקציה:

עבור $n = 1$ אכן $a_1 = 16 > 1$

בהנתן n עבורו $a_n > 1$ צ"ל $a_{n+1} > 1$

ואכן

$$a_{n+1} = \sqrt{a_n} > \sqrt{1} = 1$$

סה"כ הוכחנו כי $a_n \to 1$.

4. יהי $a \in \mathbb{R}$ ונביט בפונקציה $f(x) = 2x^3 - 3ax^2 + a$.

א. האם יש ערך של a עבורו לכל $x_1 < x_2$ מתקיים כי $f(x_1) < f(x_2)$? אם כן מצאו כזה, אחרת הוכיחו שלא קיים.

אנחנו בעצם רוצים שהפונקציה תעלה בכל הממשיים.

כמובן שנעזר בנגזרת:

$$f'(x) = 6x^2 - 6ax = 6x(x - a)$$

עבור $a = 0$ נקבל כי $f'(x) = 6x^2 \geq 0$

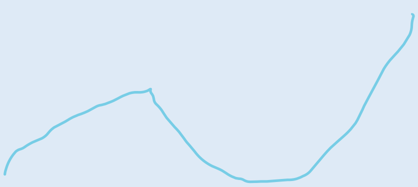
האם העובדה שהנגזרת מתאפסת פעם אחת מפריעה לנו?

לא. הרי אם הפונקציה לא הייתה עולה ממש, אלא שווה בשתי נקודות, היא הייתה קבועה בין שתי הנקודות הללו והנגזרת הייתה מתאפסת בין שתי הנקודות הללו.

ב. מצאו ערך של a עבורו למשוואה $f(x) = 0$ יש בדיוק שני פתרונות, או הוכיחו שלא קיים כזה.

בסעיף ב' צריך לחקור את הפונקציה – נמצא תחומי עלייה וירידה.

$$f'(x) = 6x(x - a)$$



אם $a > 0$ נקבל כי הנגזרת חיובית בתחומים $(-\infty, 0], [a, \infty)$ ושלילית בתחום $[0, a]$

ולכן הפונקציה עולה בתחומים $(-\infty, 0], [a, \infty)$ ויורדת בתחום $[0, a]$

(כי הנגזרת היא פרבולה מחייכת עם השורשים $0, a$)

אחריו שמצאנו תחומי עלייה וירידה, אנחנו רוצים לדעת מה גובה הפונקציה בקצה.

אם אי אפשר להציב, נחשב גבול.

$$f(0) = a$$

$$f(a) = a - a^3$$

מתי $a - a^3 = 0$ כאשר $a(1 - a^2) = 0$ בתחום שלנו רלוונטי רק $a = 1$.

יש לנו קצת מידע ויש לנו ניחוש מושכל. נבחר $a = 1$ ונראה אם הוא אכן מתאים.

מה קורה בתחום השמאלי? $(-\infty,0]$

ראינו שהמקסימום הוא $f(0)=a=1$

על מנת למצוא חיתוך בתחום עלייה זה, צריך נקודה מתחת לציר.

$$\lim_{x\to-\infty} 2x^3-3x^2+1=\{-\infty-\infty+1\}=-\infty$$

לכן קיימת נקודה בתחום בה הפונקציה מתחת לציר, וכיוון שהיא רציפה כצירוף של אלמנטריות לפי משפט ערך הביניים היא חותכת את הציר בתחום זה. השגנו חיתוך ראשון.

בתחום $[0,1]$ הפונקציה יורדת מגובה 1 עד גובה 0, ואז בתחום $[1,\infty)$ הפונקציה עולה מאפס ומעלה (לא יודע לאן וגם לא אכפת לי). ומצאנו נקודת חיתוך שנייה שמשותפת לשני התחומים.

והוכחנו שאכן יש עבור $a=1$ בדיוק שתי נקודות חיתוך עם הציר.

5. תהי f הגזירה לכל $x>0$, המקיימת כי $\lim_{x\to\infty} f'(x)=0$.

א. הוכיחו או הפריכו: $\lim_{x\to\infty} f(x)\neq\infty$.

הפרכה: $f(x)=\sqrt{x}$ או $f(x)=\ln(x)$

כי שתי הפונקציות הללו אכן שואפת לאינסוף, אך הנגזרות

$$\frac{1}{x},\frac{1}{2\sqrt{x}}\to_{x\to\infty} 0$$

ב. הוכיחו או הפריכו: $\lim_{x\to\infty}(f(x+1)-f(x))=0$.

תהי $a_n\to\infty$

$$f(a_n+1)-f(a_n)=\frac{f(a_n+1)-f(a_n)}{(a_n+1)-a_n}$$

לפי לגראנז, קיימת סדרת נקודות

$$a_n<c_n<a_n+1$$

עבורה

$$f(a_n+1)-f(a_n)=\frac{f(a_n+1)-f(a_n)}{(a_n+1)-a_n}=f'(c_n)$$

כיוון ש $a_n \to \infty$ וכן $c_n > a_n$ לפי חצי סנדביץ' נובע כי $c_n \to \infty$

וסה"כ

$$f(a_n+1)-f(a_n)=f'(c_n) \to 0$$