

אלגברה לינארית למורים – מועד א' התשע"ז

ד"ר מיטל (אליהו) רובינסון.

מתרגל: ניקול בלשוב

זמן הבחינה : 3 שעות תכננו את הזמן כהלכה!!

מותר להשתמש במחשבוניו מדעיים פשוטים בלבד.
ניתן לצבור בבחינה 110 נקודות אולם הציון הסופי לא יעלה על 100.

בסוף הבחינה יש דפים נוספים לשימושכם.

הערה: כל המרחבים הוקטוריים בבחינה הם ממימד סופי.

בהצלחה!

שאלה	ניקוד
הוכחות: שאלות 1-2	
3	
4	
5	
6	
סה"כ	

חלק א' – הוכחות (20)

ענו על אחת מהשאלות הבאות :

1. נסחו והוכיחו: $A \in F^{n \times n}$ הפיכה אם"ם לכל מע' $Ax = b$ יש פתרון יחיד... אם"ם $rank A = n$ (משפט מסכם).

2. נסחו והוכיחו את שני המשפטים :

- א. משפטון ההחלפה של שטייניץ.
- ב. השלישי חינם.

חלק ב' - שאלות3. אין קשר בין הסעיפים:

א. מצאו את כל המס' המרוכבים z המקיימים $Z \bar{Z}^2 = Z$ (8).

ב. מצאו לאילו ערכים של k למערכת $kx + ky + z = 1$ יש :

$$\begin{cases} x + y + kz = k \\ kx + ky + z = 1 \\ x + ky + kz = 2 \end{cases}$$

- i. פתרון יחיד
- ii. א"ס פתרונות.
- iii. אין פתרון.

4. נתונה המטריצה: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

- א. מצאו בסיס ומימד לתתי המרחבים: $N(A), C(A)$. (10)
- ב. מצאו את $C(A)$ בצורת תנאי (5)
- ג. השלימו את הבסיס שמצאתם ל $C(A)$ לבסיס ל R^4 (5)
- ד. הראו שמה שקיבלתם זהו סכום ישר: $C(A) + W = R^4$ (5)
- ה. חשבו את $|A|$ והסבירו האם A הפיכה? (5)

5. אין קשר בין הסעיפים :

א. פתרו בעזרת הופכית את המערכת: $(5) \begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 \\ -1 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$

ב. תהי $A \in F^{n \times n}$ מטריצה ריבועית ונניח שקיים n טבעי כך ש $A^n = 0$. הראו ש

$$(7) \quad (I - A)^{-1} = I + A + \dots + A^{n-1}$$

ג. האם קיימת מטריצה $A \in R^{3 \times 4}$ כך שקיים פתרון למערכת $Ax = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

ומתקיים ש $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ נמצא במרחב הניצב למרחב העמודות? אם כן מצאו

אחת כזו. אם לא הסבירו מדוע לא קיימת. (8)

המשך תשובה...

6. (20 נק') 20

תהי A מטריצה ממשית מסדר 3×3 . נגדיר את המטריצות :

$$C = \begin{pmatrix} A \\ A^t \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} A \\ A \end{pmatrix} \quad \text{- שתיהן מטריצות מסדר } 6 \times 3.$$

הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות :

- א. $\text{rank}A = \text{rank}B$
- ב. $\text{rank}A = \text{rank}C$
- ג. קיימת מטריצה A עבורה הדרגה של אחת מבין המטריצות C, B היא בדיוק $2\text{rank}A$.
- ד. קיימת מטריצה A עבורה הדרגה של אחת מבין המטריצות גדולה ממש מ $2\text{rank}A$.

המשך תשובה....

המשך תשובה...