תרגיל בית על מערכות מד"ר

20 בינואר 2019

תרגיל 1
פתור מערכת מד"ר הבאה:

$$\frac{d}{dt}X(t)=\begin{pmatrix}1&\bar{0}&1\\0&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}\cdot\bar{X(t)}$$

פתרון:
נמצא ערכים עמציים:

$$\begin{pmatrix}\lambda-1&0&-1\\0&\lambda-1&0\\-1&0&\lambda-1\end{pmatrix}=(\lambda-1)\left((\lambda-1)\left(\lambda-1\right)\right)-(\lambda-1)=\lambda\left(\lambda-1\right)\left(\lambda-2\right)=0$$

ולכן ע"ע הם $\lambda=0,1,2$
נחפש וקטורים עצמיים:
$\lambda=0$:

$$\begin{pmatrix}-1&0&-1\\0&-1&0\\-1&0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}v_1\\v_2\\v_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

פתרון של מערכת המשוואות הינו: $v_2=0$, $v_3=-v_1$
ולכן וקטורי עצמי השייך לע"ע $\lambda=0$הוא $u_1=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$
$\lambda=1$

$$\begin{pmatrix}0&0&-1\\0&0&0\\-1&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}v_1\\v_2\\v_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

פתרון של המערכת: $v_1 = 0$, $v_3 = 0$ ולכן וקטור עצמי השייך לע"ע $\lambda = 1$ הוא

$$u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\lambda = 2$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

פתרון של המערכת הוא $v_2 = 0$, $v_1 = v_3$ ולכן $u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

פתרון כללי למערכת מד"ר הינו: $X(t) = C_1 \cdot e^{0 \cdot t} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + C_2 \cdot e^{t} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_3 \cdot e^{2t} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

תרגיל 2

פתור בעיית קושי הבאה:

$$\frac{d}{dt} X(t) = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \\ -2 & -2 & 6 \end{pmatrix} \cdot X(t)$$

כאשר $X(0) = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$

פתרון:

נחפש ע"ע:

$$det \begin{pmatrix} \lambda + 1 & -3 & 0 \\ -3 & \lambda + 1 & 0 \\ 2 & 2 & \lambda - 6 \end{pmatrix} = (\lambda - 6)(\lambda - 2)(\lambda + 4) = 0$$

ע"ע הם: $\lambda = 6, 2, -4$

נחפש וקטורים עצמיים:

$\lambda = 2$:

$$\begin{pmatrix} 3 & -3 & 0 \\ -3 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

פתרון של המערכת: $v_1 = v_2 = v_3$ ולכן וקטור עצמי הוא $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

:$\lambda = -4$

$$\begin{pmatrix} -3 & -3 & 0 \\ -3 & -3 & 0 \\ 2 & 2 & -10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ולכן פתרון של מערכת מד"ר הוא: $v_3 = 0$, $v_1 = -v_2$ ולכן $u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

באותו אופן נמצא שעבור $\lambda = 6$ וקטור עצמי הוא $u_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

ולכן הפתרון הכללי הינו: $X(t) = C_1 \cdot e^{2t} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 \cdot e^{-4t} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_3 \cdot e^{6t} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

נמצא פתרון לבעיית קושי:

$$X(0) = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_3 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$$

נפתור את המ"ר ונקבל: $X(t) = 2 \cdot e^{2t} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - 3 \cdot e^{4t} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + e^{6t} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

תרגיל 3

פתור מערכת מד"ר:

$$\begin{cases} x' = x - y + 4z \\ y' = 3x + 2y - z \\ z' = 2x + y - z \end{cases}$$

פתרון:

נרשום את המערכת באמצעות מטריצה:

$$\frac{d}{dt} X(t) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot X(t)$$

נחפש ע"ע:

$$det \begin{pmatrix} \lambda - 1 & 1 & -4 \\ -3 & \lambda - 2 & 1 \\ -2 & -1 & \lambda + 1 \end{pmatrix} = (\lambda - 1)(\lambda - 2)(\lambda + 1) = 0$$

ולכן ע"ע הם: $\lambda = 1, 2, -1$

וקטור עצמי השייך לע"ע $\lambda = 1$ הוא $u_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$

וקטור עצמי השייך ל-$\lambda = 3$ הוא $u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

וקטור עצמי השייך ל-$\lambda = -2$ $u_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

ולכן הפתרון הכללי של המד"ר הוא: $X(t) = C_1 \cdot e^t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 \cdot e^{3t} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} +$
$C_3 \cdot e^{-2t} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

תרגיל 4

פתור את

$$\frac{d}{dt}X(t) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} X(t)$$

ערכים עצמיים:

$$det \begin{pmatrix} \lambda - 1 & -1 & -2 \\ -1 & \lambda - 2 & -1 \\ -2 & -1 & \lambda - 1 \end{pmatrix} = (\lambda - 1)(\lambda - 4)(\lambda + 1) = 0$$

ע"ע הם $\lambda = 1, -1, 4$

וקטורי עצמי עבור $\lambda = 1$ הוא $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

וקטור עצמי עבור $\lambda = -1$ הוא $u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

וקטור עצמי עבור $\lambda = 4$ הוא $u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

ולכן הפתרון הכללי של המד"ר הוא $X(t) = C_1 \cdot e^t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 \cdot e^{-t} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} +$
$C_3 \cdot e^{4t} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

תרגיל 5

נתון:

$\frac{d}{dt}X(t) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \cdot X(t)$, כך ש- $X(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \end{pmatrix}$

חשב: $lim_{t\to\infty}\frac{y(t)}{x(t)} + lim_{t\to-\infty}\frac{y(t)}{x(t)}$

נפתור את המד"ר ונקבל שהפתרון לבעיית קושי הנתונה הינו:

$$X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = C_1 \cdot e^{-t} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} + C_2 \cdot e^{3t} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

ולכן $x(t) = 2 \cdot e^{3t} - e^{-t}$, $y(t) = 4 \cdot e^{3t} + 2 \cdot e^{-t}$

ולכן $= lim_{t\to\infty}\frac{y(t)}{x(t)} + lim_{t\to-\infty}\frac{y(t)}{x(t)} = lim_{t\to\infty}\frac{2\cdot e^{3t}-e^{-t}}{4\cdot e^{3t}+2\cdot e^{-t}} + lim_{t\to-\infty}\frac{2\cdot e^{3t}-e^{-t}}{4\cdot e^{3t}+2\cdot e^{-t}}$ $\frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$

התרגילים הבאים עוסקים בנושא פתרון של משוואות אוילר

תרגיל 6

פתור את המשוואה הבאה:

$$x^2y^{''} - xy^{'} + y = x^5$$

פתרון:

נחפש פתרון מהצורה: $y(x) = x^r$, נגזור, נציב במשוואה ונבנה משוואה אידנפוטנטית הבאה:

$r(r-1) - r + 1 = 0$. הפתרון של המשוואה הינו $r = 1$ עם ריבוי 2

ולכן הפתרון ההומוגני הוא $y_h(x) = C_1x + C_2xln(x)$.

נחפש פתרון כללי לא הומוגני בשיטת וריאציית המקדמים.

קודם כל נחלק את המשוואה ב-x^2 ונקבל: $y^{''} - \frac{y^{'}}{x} + \frac{y}{x^2} = x^3$.

נבנה מטריצה :

$$\begin{pmatrix} x & xln(x) \\ 1 & ln(x)+1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} C_1^{'}(x) \\ C_2^{'}(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ x^3 \end{pmatrix}$$

$W(x) = x$, $W_1(x) = -x^4ln(x)$, $W_2(x) = x^4$

ולכן $C_1(x) = \int \frac{-x^4ln(x)}{x}dx = \int -x^3ln(x)dx = -\frac{x^4}{4}ln(x) + \frac{x^4}{16} + C_1$

$C_2(x) = \int x^3dx = \frac{x^4}{4} + C_2$

ולכן $y(x) = C_1x + C_2xln(x) + \frac{x^5}{16}$

תרגיל 7

פתור את המשוואה הבאה:

$$x^2y^{''} - 6y = 1 + ln(x)$$

פתרון:

נחפש פתרון מהצורה: $y(x) = x^r$

נבנה משוואה אידנפוטנטית: $r(r-1) - 6 = r^2 - r - 6 = 0$ ולכן $r_{1,2} = 3, -2$

ולכן פתרון למשוואה הומוגנית הינו: $y_h(x) = C_1x^3 + C_2x^{-2}$

נמצא פתרון כללי לא הומוגני בשיטת וריאציית המקדמים. נחלק את המשוואה המקורית ב-x^2 ונקבל: $y^{''} - \frac{6}{x^2}y = \frac{1+ln(x)}{x^2}$
נחפש פתרון מהצורה: $y(x) = C_1(x)x^3 + C_2(x)x^{-2}$
נבנה מטריצה:

$$\begin{pmatrix} x^3 & x^{-2} \\ 3x^2 & -\frac{2}{x^3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1^{'}(x) \\ C_2^{'}(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1+ln(x)}{x^2} \end{pmatrix}$$

$W(x) = -5$, $W_1(x) = -\frac{1+ln(x)}{x^4}$, $W_2(x) = x(1+ln(x))$
$C_1(x) = \int \frac{1+ln(x)}{5x^4}dx + C_1$, $C_2(x) = \int -\frac{x(1+ln(x))}{5}dx + C_2$
נחשב את האינטגרלים ונציב בפתרון.

תרגיל 8

$2x^2y^{''} + 5xy^{'} + y = 3x + 2$

פתרון:

$y(x) = C_1 \cdot x^{-\frac{1}{2}} + C_2 \cdot x^{-1} + \frac{1}{2}x + 2$

תרגיל 9

$x^3y^{'''} - x^2y^{''} + 2xy^{'} - 2y = 1$

פתרון הומוגני יוצא: $y(x) = C_1x + C_2xln(x) + C_3x^2$ ממשיכים לפתור בשיטת וריאציית המקדמים

תרגיל 10

$3(x+6)^2y^{''} + 25(x+6)y^{'} - 16y = 0$

נחפש פתרון מהצורה: $y(x) = (x+6)^r$ ופותרים כרגיל.
פתרון כללי של ההומוגני: $y(x) = C_1(x+6)^{-8} + C_2(x+6)^{\frac{2}{3}}$