תרגול 10: פעולות של חבורות על קבוצות

תהי G חבורה ו X -קבוצה אז <u>הומומורפיזם</u> $\varphi:G\rightarrow S(X)$ נקרא **פעולה של החבורה G על הקבוצה X.**

<u>במילים אחרות:</u> אם אנו אומרים ש G **פועלת** על X ע"י φ אז הכוונה היא שהעתקה φ מתאימה לכל איבר בחבורה G פונקציה חח"ע ועל מ X ל X.

מנהג נפוץ הוא להתייחס לאיברים ב G כפונקציות על X, ולרשום g(x) במקום $\varphi(g)(x)$.

הנקודה החשובה בהגדרה הנ"ל היא שהפעולה היא הומ', ולכן:

$$\varphi(gh)(x)=[\varphi(g)\varphi(h)](x)=\varphi(g)[\varphi(h)(x)]$$

כלומר ניתן להכפיל את האיברים ב G ואז לחשב את הפעולה, או שניתן לחשב את הפעולה של h ואח"כ של g. בכתיב המקוצר נקבל:

$$(gh)(x)=g(h(x))$$

שמזכיר קצת את כלל האסוציאטיביות.

<u>**הערה:**</u> במקרה שהחבורה G פועלת על עצמה, כלומר X=G, אזי זה יכול להיות מבלבל להשתמש בכתיב המקוצר, ועדיף להשתמש בכתיב המסורבל יותר כדי למנוע בלבולים.

<u>**דרך נוספת להגדרת פעולה של חבורה:**</u>

בהנתן חבורה G וקבוצה X, פעולה של G על X היא פונקציה בינארית $G\times X\rightarrow X$ שנסמנה ע"י $(g,x)\mapsto g*x$, כך שמתקיים:

1. $(gh)*x=g*(h*x)$
2. $e*x=x$

<u>**תרגילי בית:**</u>

א. הראו שבהגדרה החדשה, כשקובעים את $g\in G$ מקבלים ש $g*:X\rightarrow X$ היא פונקציה חח"ע ועל. רמז: שימו לב ששתי התכונות (1,2) דרושות כדי להוכיח תרגיל זה.

ב. הראו שההגדרה הנ"ל שקולה להגדרת פעולה על קבוצה שראינו בעמוד הקודם.

<u>**דוגמאות:**</u>

1. $G=S_n$ $X=\{1,2,...,n\}$ מהו $S(X)$ במקרה זה?

תשובה: $S(X)=S_n, |X|<\infty$ נגדיר $\varphi = Id$ כלומר הפעולה על החבורה זו מתאימה כל תמורה לעצמה (תזכרו שתמורה היא פונקציה) (תרגיל: הוכיחו שזהו אכן הומומורפיזם).

2. **<u>פעולת כפל משמאל:</u>** G חבורה ו $X=G$ כלומר החבורה G פועלת על עצמה ע"י $\varphi : G\to S(G), \forall g\in G, \varphi(g)(x)=gx$.

כלומר φ מתאימה לכל איבר ב G פונקציה gx כאשר $\Pi \in S(G), \Pi : G\to G, \Pi(x)=gx$ $\Pi=\varphi(g)$.

נוכיח שאכן φ פעולה:

1) נוכיח ש $\forall g\in G, \varphi(g)=\Pi\in S(G)$ (כלומר Π הנ"ל היא חח"ע ועל) אם

$$\Pi(x_1)=\varphi(g)(x_1)=\varphi(g)(x_2)=\Pi(x_2)$$
$$\Leftrightarrow gx_1=gx_2 \Leftrightarrow x_1=x_2$$

ואכן Π חח"ע.

על: יהי $x\in G$ אזי מתקיים $g^{-1}x\in G$ כי G חבורה ולכן סגורה לכפל.

$\Pi(g^{-1}x)=gg^{-1}x=x$ **ולכן** Π על.

ובסך הכל קיבלנו ש $\Pi=\varphi(g)\in S(G)$.

2) נוכיח שאכן φ הנ"ל היא הומומורפיזם:

<u>שימו לב:</u> **שפעולת הכפל בחבורה** $S(G)$ **היא הרכבה:**

$$\varphi(g_1)\varphi(g_2)(x)=\varphi(g_1)(g_2x)=g_1(g_2x)=(g_1g_2)x=$$
$$\varphi(g_1g_2)(x)$$

והראינו שאכן φ הנ"ל הינה פעולה (השתמשנו בשיויון השלישי באסוציאטיביות של החבורה G).

<u>שימו לב:</u> כפל מימין אינה בהכרח פעולה: אם נגדיר $\psi(g)(x)=xg$ אזי $\psi(gh)(x)=x(gh)=\psi(h)\psi(g)(x)$ **ולכן** ψ אינה הומ' (אלא אם כן החבורה היא אבלית).

<u>הגדרה:</u> **<u>מסלול</u>** (Orbit) של איבר $x\in X$ מסומן כ

$$\theta(x)=\{y\in X \mid \exists g\in G, \varphi(g)(x)=y\}=$$
$$\{\varphi(g)(x) \mid g\in G\}\subseteq X$$

<u>הסבר:</u> יש לנו חבורה G שפעולת על קבוצה X אז מסלול של איבר $x\in X$ הוא כל האיברים ש"ניתן להגיע" אליהם ע"י הפעולה φ.

דוגמאות:

1. **פעולת ההצמדה:** נגדיר עוד פעולה של חבורה G על עצמה:

$g \in G, \varphi(g) \in S(G), \varphi(g)(a) = gag^{-1}$.

$\theta(a) = \{gag^{-1} \mid g \in G\} = conj(a)$.

שימו לב: ההצמדה ההפוכה $\psi(g)(a) = g^{-1}ag$ אינה פעולה, כיוון שלא יתקיים התנאי שדורש ש ψ היא הומ' (בדקו זאת).

2. $H \le G$. נגדיר פעולה של H על G ע"י כפל משמאל כלומר $g \in G, h \in H, \varphi(h)(g) = hg$ מהו המסלול של $g \in G$?

$\theta(g) = \{\varphi(h)(g) \mid h \in H\} = \{hg \mid h \in H\} = Hg$.

הגדרה: **נקודת שבת** היא נקודה $x \in X$ כך ש $\theta(x) = \{x\}$.

משפט: היחס *"x במסלול של y"* הוא יחס שקילות. מסקנה: היחס הנ"ל מחלק את הקבוצה X למסלולים זרים.

מסקנות:

א. $X = \coprod \theta(x)$ האיחוד הוא זר כאשר בוחרים נציג אחד מכל מסלול.

ב. אם נסמן ב $Fixed$ את קבוצת נקודות השבת אזי $|X| = |Fixed| + \sum_{|\theta(x)| \ge 2} |\theta(x)|$.

הגדרה: ה**מייצב** (stabilizer) של איבר $x \in X$ מוגדר כ (ישנם כמה סימונים מקובלים):

$$St(x) = C_x = \{g \in G \mid \varphi(g)(x) = x\}$$

משפט: $C_x \le G$, כלומר המייצב הוא תת חבורה של G .

תרגיל בית: אם $x \in X$ היא נקודת שבת, אזי $C_x = ?$.

דוגמאות (בהתאם לדוגמאות הקודמות):

1. φ פעולת ההצמדה ויהי $a \in X = G$ מהו C_a?

$$C_a = \{g \in G \mid \varphi(g)(a) = a\} = \\ \{g \in G \mid gag^{-1} = a\} = \{g \in G \mid ga = ag\} = Z_a$$

כלומר: הוכחנו כעת שהמייצב של איבר תחת פעולת ההצמדה הוא המרכז של האיבר בחבורה.

2. $H \le G$ פועלת על G ע"י כפל משמאל כלומר $\varphi(h)(g) = hg$ מהו C_g עבור $g \in G$?

$$C_g = \{h \in H \mid \varphi(h)(g) = g\} =$$
$$\{h \in H \mid hg = g\} = \{h \in H \mid h = e_H\} = \{e_H\}$$

שאלה: מהו הקשר בין מסלול למייצב? תשובה:

משפט: $|\theta(a)| = [G : C_a]$.

משפט(מסקנה מהמשפט הקודם): $|\theta(a)| \mid |G|$ סדר המסלול מחלק את סדר החבורה.

תרגיל בית: בדוגמאות הקודמות אכן נקבל ש-$\theta(a)$ מחלק את סדר החבורה (הראו זאת).

תרגיל: הראו שבפעולה של חבורה G מסדר 27 על קבוצה X עם 223 איברים בהכרח יש נקודות שבת.

הוכחה: לפי משפט קודם ראינו ש $|X| = |Fixed| + \sum_{|\theta(x)| \geq 2} |\theta(x)|$. נניח ש $|Fixed| = 0$. אזי $|X|$ היא סכום של מחלקי 27 הגדולים מ 1 (לפי המשפט האחרון). כלומר בהכרח $|\theta(x)| = 3, 9, 27$ לכל $x \in X$. לכן 223=3k+9j+27l . נעבור למודולו 3, ונקבל $1 \equiv 0 (\bmod 3)$, סתירה. כלומר בהכרח $|Fixed| \neq 0$.

תרגיל ממבחן תשס"ז, מועד ב':

החבורה **S4** פועלת על פולינומים ב-4 משתנים באופן הבא:

$$\pi(\mathrm{f}(\mathrm{x}_1, \ldots, \mathrm{x}_4)) = \mathrm{f}(\mathrm{x}_{\pi(1)}, \ldots, \mathrm{x}_{\pi(4)}) .$$

מצא את סדר המסלול ואת סדר המייצב של x1x2 .

פתרון:

נראה קודם דוגמא של פעולת החבורה: נפעיל את התמורה $\pi = (1,3)(2,4)$ על הפולינום $x_1 + x_2^3 x_3$:

$$\pi(x_1 + x_2^3 x_3) = x_3 + x_4^3 x_1 .$$

מספיק למעשה למצוא את סדר המסלול, ואת סדר המייצב נחשב לפי המשפט הנ"ל.

$$\theta(x_1x_2) = \{x_1x_2, x_1x_3, x_1x_4, x_2x_3, x_2x_4, x_3x_4\}$$

ולכן, $|\theta(x_1x_2)| = 6$.

אם כך $[S_4 : C_{x_1x_2}] = 6 \Rightarrow |C_{x_1x_2}| = \frac{4!}{6} = 4$.

משוואת מחלקות הצמידות

תהי G חבורה ו $x \in G$:

1. מחלקת הצמידות של x היא $conj(x):=\{gxg^{-1} \mid g\in G\}$
2. מרכז של x הוא $Z_x:=\{g\in G \mid gx=xg\}=\{g\in G \mid x=gxg^{-1}\}$.
3. **<u>משפט:</u>** $|conj(x)|=[G:Z_x]$ (נובע ישירות מהמשפטים של פעולות על חבורות שראינו קודם).
4. מה קורה אם $x\in Z(G)$ (x מתחלף עם כל איברי G)?

<u>תשובה:</u> במקרה זה x היא נקודת שבת של הפעולה: $Z_x=G, conj(x)=\{x\}, |conj(x)|=1$.

<u>משפט:</u> $G=\coprod conj(x)$ כלומר G הוא איחוד זר של מחלקות הצמידות שלה (כאשר לוקחים נציג אחד מכל מחלקת צמידות)

<u>מסקנה:</u> (**<u>משוואת המחלקות</u>**) $|G|=|Z(G)|+\sum\limits_{|conj(x_i)|\geq 2}[G:Z_{x_i}]$

כאשר הסכום עובר על איברים שמחלקת הצמידות שלהם גדולה או שווה ל 2.

<u>משפט:</u> תהי G חבורה. אם $G/Z(G)$ ציקלית אז G אבלית (ואז מלכתחילה $Z(G)=G$).

<u>הוכחה:</u> יהיו $x,y\in G$. מכיוון ש $G/Z(G)$ ציקלית קיים $a\in G$ כך ש

$G/Z(G)=\langle aZ(G)\rangle=\{(aZ(G))^i \mid i\in\mathbb{Z}\}=\{a^iZ(G) \mid i\in\mathbb{Z}\}$.

כעת $xZ(G)\in G/Z(G)$ ולכן $xZ(G)=a^iZ(G)$ עבור i מסוים, ולכן $x=a^iz_1$ עבור $z_1\in Z(G)$.

בצורה דומה $y=a^jz_2$ עבור $z_2\in Z(G)$.

כעת $xy=a^iz_1a^jz_2=a^jz_2a^iz_1=yx$ (הסבירו את השיוויונות הנ"ל).

<u>מסקנה:</u> הראו שבחבורה G מסדר pq כאשר p,q ראשוניים (לאו דווקא זרים) מתקיים Z(G)=G (כלומר החבורה אבלית) או Z(G)={e}.

<u>הוכחה:</u> <u>תרגיל בית</u>.

<u>תרגיל:</u> הראו שמספר המחלקות בחבורה מסדר 15 הוא 15 או 5. למעשה מספר המחלקות חייב להיות 15 (ואז החבורה היא ___?) אבל לא נוכיח כעת.

<u>הוכחה:</u>

לפי המסקנה הנ"ל, ידוע ש $|Z(G)|=15 \vee |Z(G)|=1$ (מדוע?). אם $|Z(G)|=15$ אזי מספר המחלקות הוא 15, אחרת (המרכז טריויאלי) נקבל לפי משוואת המחלקות:

$$15=1+3k+5l$$

(זאת כיוון שהסדר של מחלקת צמידות חייב לחלק את סדר החבורה, ולכן מחלקות הצמידות הגדולות מ 1 חייבות להיות בגודל 3 או 5, מדוע?).

לפי שיקולי גודל, נקבל ש $l\le 2$, אבל $l\ne 0$ כי $3\nmid 14$ וגם $l\ne 2$ כי $3\nmid 4$. לכן בהכרח $l=1$ ומכאן נקבל $k=3$, ובסה"כ נקבל 5 מחלקות.

תרגיל בית: אם נקבל באמת מחלקה אחת מגודל 5 בתרגיל הנ"ל, מהו סדר האיברים במחלקה? מכאן ניתן לקבל סתירה לכך שקיימת מחלקה מגודל 5 ולהסיק שחבורה מסדר 15 היא בהכרח אבלית.

שאלה ממבחן תשס"ט, מועד א':

מצאו את כל החבורות הסופיות להן שתי מחלקות צמידות.

תשובה:

נשים לב שאיבר היחידה תמיד נמצא במרכז, וכל איבר במרכז הוא במחלקת צמידות משל עצמו. אם יש עוד איבר במרכז, אזי כבר יש לנו 2 מחלקות צמידות, ולכן יש רק 2 איברים בחבורה, כלומר החבורה היא $\mathbb{Z}_2$. אחרת רק היחידה במרכז, ונקבל לפי משוואת המחלקות $|G|=1+[G:Z_x]$, כאשר x איבר כלשהו השונה מהיחידה, וגם $[G:Z_x]\ge 2$. אבל ידוע ש $[G:Z_x]\,|\,|G|$, אבל $|G|=[G:Z_x]+1$ וזה ייתכן רק אם $[G:Z_x]=1$, סתירה לכך ש $[G:Z_x]\ge 2$.

תרגיל: כל חבורה מסדר p^2 היא אבלית.

פתרון: כאמור Z(G)=G או Z(G)={e}. אם Z(G)=G אז סיימנו. אחרת, Z(G)={e}. אבל אז נקבל $p^2=|G|=1+tp$ (כל מחלקת צמידות חייבת לחלק בגודלה את p^2, אבל המקרה היחיד האפשרי כאן הוא p). נעבור ל (mod p), ונקבל $0\equiv 1 (\mathrm{mod}\ p)$, סתירה.