## תרגיל

נתונה רשימה של זוגות $(a_1, b_1),\dots,(a_n, b_n)$ כאשר $a_i$ מציין תאריך לידה של לטאה ו-$b_i$ תאריך פטירה.
הציעו אלגוריתם שהפלט שלו הוא המספר המקסימלי של לטאות שחיו באותו זמן.

פיתרון:

הרעיון: נמיין את תאריכי הלידה והפטירה ביחד תוך כדי שמירה על הנתון לידה/פטירה.

- לכל זוג $(a_i, b_i)$ מגדיר 2 זוגות מספרים: $(a_i, 1), (b_i,-1)$ ($1$ מציין לידה ו—$1$ מציין פטירה).
- נמיין לפי הקואורדינטה הראשונה **ואז לפי השניה*** $O(2n\log n) = O(n\log n)$ (קואורדינטה שניה - כך שעבור כל מי שמת וחי באותו יום הלידה תקדים את המיתה במערך הממוין)
- כעת נעבור על הרשימה הממויינת לפי האלגוריתם הבא: $O(n)$

```
max = 0
count = 0
for each pair (x_i, y_i)  in sorted list:
        count++=y_i
        m= max(m, count)
return m
```

*count* – כמה חיים ביחד כרגע, *m* – הערך המקסימלי שחיו ביחד עד עכשיו

דוגמת ריצה:

הזוגות:

*(1,5), (2,3), (2,10), (3,10), (4,7)*

הזוגות החדשים ממוינים:

*(1,1) (2,1), (2,1) (3,1) (3,-1) (4,1) (5,-1) (7,-1) (10,-1) (10,-1)*

הלולאה:

| *i* | *1* | *2* | *3* | *4* | *5* | *6* | *7* | *8* | *9* | *10* |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *Count* | *1* | *2* | *3* | *2* | *3* | *4* | *5* | *2* | *1* | *0* |
| *Max* | *1* | *2* | *3* | *3* | *3* | *4* | *4* | *4* | *4* | *4* |

- הלטאות שחיו בו-זמנית הם: *(1,5), (2,10), (3,10), (4,7)*.

סיבוכיות: $O(n\log n) + O(n) = O(n\log n)$

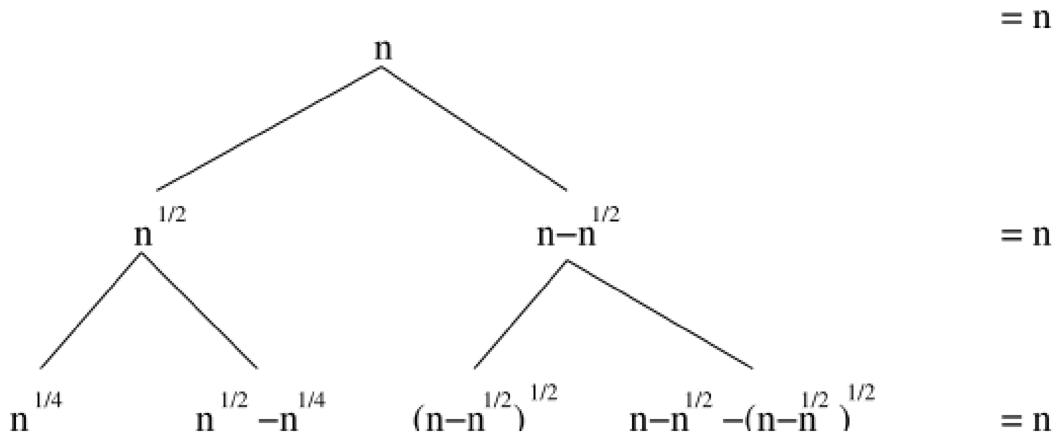
## תרגיל – מודיפיקציה של quicksort

במקום שימוש של במקום שימוש של $A[n]$ כ-pivot, יש לקחת את$2\sqrt{n}+1$ של A, לסדר אותם ב-bubble sort ואז להשתמש באיבר האמצעי כ-Pivot. הניחו כי יש לפחות $\sqrt{n}$ איברים לאחר partitioning וכי אין איברים חוזרים.

א) כתבו ביטוי רקורסיבי לזמן הריצה הגרוע ביותר.

לאחר חלוקה יש לפחות $\sqrt{n}$ איברים בתת מערך. במקרה הגרוע ביותר נותרו $n-\sqrt{n}$ בתת המערך השני. יש לסדר את $2\sqrt{n}+1$ האיברים. $\theta\left(\left(2\sqrt{n}+1\right)^2\right) = \theta(n)$. מציאת החציון $\theta(1)$. החלוקה לשני תת מערכים היא $\theta(n)$. סך הכל $T(n) = T(\sqrt{n}) + T(n-\sqrt{n}) + \theta(n)$.

ב) ציירו את עץ הרקורסיה




ג) מה הגובה של הענף הארוך ביותר (מרחק בין השורש לעלה)?
השתמשו בקירוב $\sqrt{n-\sqrt{n}} \sim \sqrt{n} - \frac{1}{2}$.

הענף השמאלי ביותר הוא הקצר ביותר. אורכו מקיים $T\left(\frac{1}{2^{i}}\right) \le 2 \to i \ge \log(\log(n))$. בענף הימני ביותר, שהוא הארוך ביותר, בפעם הראשונה אנו קוראים ל-$T(n-\sqrt{n})$. בפעם השניה נקרא ל-

$$T\left(n-\sqrt{n}-\sqrt{n-\sqrt{n}}\right) \sim T\left(n-\sqrt{n}-\sqrt{n}-\frac{1}{2}\right) \sim T\left(n-2\sqrt{n}\right)$$

בפעם ה-$i$-ית: $T \sim T\left(n-\mathrm{i}\sqrt{n}\right)$

אשר יהיה $T(1)$ עבור $\mathrm{i}=\sqrt{n}$ בקירוב.

ד) השתמשו בסעיפים ב' ו-ג' על מנת לתת חסם לסיבוכיות האלגוריתם.

בכל רמה בעץ יש n פעולות, ואורך הענף הארוך ביותר הוא בקירוב $\sqrt{n}$, לכן $T(n) = O\left(n^{3/2}\right)$