תרגיל 10

1. יהי $\omega < \kappa$ מונה אינסופי. חשבו את העוצמה של קבוצת כל הסודרים הגבוליים שקטנים מκ. (הדרכה אפשרית: ניתן להשתמש בעובדה שכל סודר הוא מהצורה של גבולי ועוד טבעי).
פתרון:

נסמן בA_0 את קבוצת הסודרים הגבוליים שקטנים מκ, ונסמן ב A_n את הקבוצה הבאה: $A_n = \{\alpha + n : \alpha \in A_0\}$. מיחידות ההצגה כגבולי ועוד טבעי, ידוע שאם $\alpha \neq \beta$ אז $\alpha + n \neq \beta + n$, ולכן לכל $n \in \omega$ $|A_n| = |A_0|$. כמו כן, מיחידות ההצגה, הקבוצות הנ"ל זרות. (לא ייתכן ש$\alpha + n = \beta + m$ כאשר α, β גבוליים, ו$n \neq m$ טבעיים). כעת נשים לב ש$\kappa = \bigcup_{n\in\omega} A_n$. הסבר: כל סודר שקטן מ$\kappa$ הוא מהצורה $\alpha + n$ עבור α גבולי. בפרט, $\alpha < \kappa$, ולכן הסודר שייך לA_n מתאים. מצד שני, יהי $\beta \in A_n$ לאיזשהו n. אז $\beta = \alpha + n$ כאשר α גבולי שקטן מκ. מאחר שκ מונה, הוא סודר גבולי, ולכן אם $\alpha < \kappa$ אז לכל $n \in \omega$, $\alpha + n < \kappa$. (באינדוקציה על הטבעיים).

לסיכום, נסמן $\lambda = |A_0|$. מתרגיל שעשינו בתרגול נקבל ש$\kappa = \omega \otimes \lambda = \max\{\omega, \lambda\}$, ומאחר ש$\omega < \kappa$ נקבל $\lambda = \kappa$.

2.

(א) תזכורת: קבוצה נקראת בת מניה אם עוצמתה קטנה או שווה לω.
יהי α סודר בן מניה (כלומר, סודר שעוצמתו בת מניה). הוכיחו שω^α בן מניה.
הוכחה:

נוכיח באינדוקציה טרנספיניטית.

בסיס: $\alpha = 0$. $\omega^0 = 1$ זאת קבוצה בת מניה.

עוקב: נניח ש$\beta = \alpha+1$ בן מניה. בפרט, α בן מניה. לכן $\omega^\beta = \omega^{\alpha+1} = \omega^\alpha \cdot \omega$, מכפלה של שתי קבוצות בנות מניה היא בת מניה.

גבולי: נניח שβ סודר גבולי בן מניה. בפרט, לכל $\alpha < \beta$, α בן מניה. לכן $\omega^\beta = \bigcup_{\alpha<\beta} \omega^\alpha$, β בן מניה, כלומר, יש לו מס' בן מניה של קודמים, ולכן מהנחת האינדוקציה זהו איחוד בן מניה של קבוצות בנות מניה, ולכן בן מניה.

(ב) השתמשו בסעיף א' כדי להוכיח ש $\omega^{\aleph_1} = \aleph_1$.
הוכחה:

מצד אחד, הוכחנו בעבר שלכל $\alpha > 1, \beta$, $\alpha^\beta \geq \beta$.

לכן $\omega^{\aleph_1} \geq \aleph_1$.

מצד שני, לכל $\alpha < \aleph_1$, α בן מניה, ולכן ω^α בן מניה, ובפרט, $\omega^\alpha < \aleph_1$. מכאן, $\omega^{\aleph_1} = \sup_{\alpha<\aleph_1} \omega^\alpha \leq \aleph_1$.
מסקנה: $\omega^{\aleph_1} = \aleph_1$.