

פיסיקה למתמטיקאים 88-320 מבחן מועד א' סמסטר ב' תשע"ד

משך המבחן: שלוש שעות. כל חומר עזר מותר בשימוש (כולל מחשבון).
ענו על 3 מ-4 השאלות הבאות. ניתן גם (לא חובה) לענות על שאלת הבונוס (שאלה 5).
סמנו בבירור על איזו שאלה אתם עונים והקיפו תשובות סופיות.

1. ההמילטוניאן של אוסילטור הרמוני פשוט נתון ע"י

$$\mathcal{H} = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$$

$$a = \sqrt{\frac{m\omega}{2}} \left(x + i\frac{p}{m\omega} \right), \quad a^* = \sqrt{\frac{m\omega}{2}} \left(x - i\frac{p}{m\omega} \right)$$

(א) בטאו את \mathcal{H} באמצעות a, a^* .

(ב) חשבו את סוגרי פואסון $\{a, \mathcal{H}\}$, $\{a^*, \mathcal{H}\}$, $\{a, a^*\}$.

(ג) רשמו את משוואות התנועה עבור a, a^* ופתרו אותן.

(ד) בטאו את x, p באמצעות הפתרונות שקיבלתם.

(ה) חשבו את $\{x, p\}$ ע"י שימוש בתוצאות 1ד. השוו לחישוב הישיר.

2. גוף שמסתו m מונח על שולחן. הגוף חפשי לנוע במישור xy . הוא מחובר לשני קפיצים בעל קבוע קפיץ k ואורך רפוי l . הקצה השני של אחד הקפיצים מחובר לנקודה $(0, L)$ ושל הקפיץ השני מחובר לנקודה $(0, -L)$.

(א) כתבו את הלגרנז'יאן.

(ב) כתבו את משוואות התנועה בשני הצירים.

(ג) מצאו את נקודות שיווי המשקל היציבות והבלתי יציבות.

(ד) עבור נקודות שיווי המשקל היציבות מצאו את תדירות התנודות הקטנות בכל אחד מהצירים.

3. חלקיק קוונטי עם מסה m נמצא בבור פוטנציאל חד מימדי אינסופי וכלוא בתחום $-a \leq x \leq a$. בזמן $t = 0$ פונקצית הגל של החלקיק היא:

$$\psi_0 = \begin{cases} c(a-x) & 0 \leq x \leq a \\ c(a+x) & -a \leq x \leq 0 \end{cases}$$

(א) מצאו את c .

(ב) מודדים את האנרגיה של החלקיק בזמן 0. מהי ההסתברות למצוא את החלקיק בכל אחת משלוש רמות האנרגיה הראשונות ($n = 1, 2, 3$)?

(ג) כתבו ביטוי (כסכום אינסופי) לפונקצית הגל של החלקיק בזמן t כלשהו.

(ד) מהי ההסתברות למצוא את החלקיק בכל אחד משלוש רמות האנרגיה הראשונות ($n = 1, 2, 3$) בזמן $t \rightarrow \infty$?

4. האופרטור המתאר גודל פיזיקלי נתון ע"י:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -2 \\ 0 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

(א) מהם הערכים האפשריים במדידת הגודל הפיזיקלי המתאים לאופרטור A ?

(ב) אם מצב המערכת נתון ע"י הוקטור $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, מהם הערכים האפשריים במדידת A ובאילו הסתברויות הם מתקבלים (שימו לב, הוקטור אינו מנורמל)?

(ג) אם מצב המערכת נתון ע"י הוקטור $v = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, מהם הערכים האפשריים במדידת A ובאילו הסתברויות הם מתקבלים?

(ד) גודל פיזיקלי אחר מתואר ע"י האופרטור

$$B = \begin{pmatrix} 14 & -4 & -4 \\ -4 & 6 & 4 \\ -4 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

אם מדדנו כרגע את הגודל הפיזיקלי המתאים ל B וקיבלנו שתוצאת המדידה היא 6, מה ייתקבל אם נמדוד עכשיו את A ?

(ה) (שאלת בונוס) ספינת החלל אנטרפרייז, הנעה במהירות של $\beta = 0.6$ (יחסית למהירות האור) רודפת אחרי ספינה קלינגונית הנעה במהירות $\beta = 0.8$ ממהירות האור. האנטרפרייז משגרת טורפדו לכיוון הספינה הקלינגונית. מהי המהירות המינימלי של הטורפדו, יחסית לאנטרפרייז, כך שהוא יפגע בספינה הקלינגונית.

בהצלחה!