

**ועדת המשמעת מזהירה!**  
 נבחן שימצאו ברשותו חומרי  
 עזר אסורים או יתפס בהעתקה  
 יענש בחומרה עד כדי הרחקתו  
 מהאוניברסיטה

שאלון בחינה בקורס: פונקציות מרוכבות (88-231-01)  
 שם המרצה: פרופ' שחר נבו  
 סמסטר ב', מועד א'.  
 משך הבחינה: שלוש שעות  
חומר עזר: מחשבון כיס בלבד.

ענו על 5 מתוך 6 השאלות הבאות, נמקו כל תשובה.

שאלה 1

א. מצא את כל ערכי החזקה  $(1+i)^{(1-2i)}$  והראה שישנם ערכים קטנים כרצוננו (פרט ל-0) וערכים גדולים כרצוננו. 10

ב. חשב  $\int_{|z|=3} \frac{z^3}{e^{\sqrt{z^2}}} dz$ . 10

שאלה 2

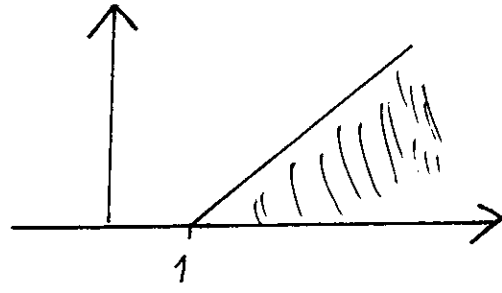
א. נתון כי ל-  $f(z)$  קוטב מסדר 2 ב-  $z_0 = 0$ . איזו סינגולריות יש ל-  $\frac{f(z)}{z^2} + f(z^2)$ ? 12

ב-  $z_0 = 0$  ?

ב. נסח את עקרון הארגומנט. 8

שאלה 3

א. העתק הגיזרה  $\{(x+iy) : 1 < x, 0 < y < x-1\}$  קונפורמית על עיגול היחידה. 11



ב. תהיינה  $f, g$  פונקציות שלמות ונניח כי יש  $L > 0$  כך שלכל  $z \in \mathbb{C}$ , 9

$|f(z) - g(z)| < L$  ,  $|f(z) + g(z)| < L$ . הוכח כי  $f, g$  הן פונקציות קבועות.

שאלה 4

הוכח את משפט קזורטי-ווירשטרס האומר שאם  $z_0$  סינגולריות עיקרית של  $f$  אז לכל  $0 < r$  20

קטן מספיק התמונה של  $\Delta'(z_0, r)$  ע"י  $f$  צפופה ב-  $\mathbb{C}$ .

שאלה 5

חשב  $\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$  20

שאלה 6

א. הסבר מדוע  $z_0 = 1$  היא קוטב של  $f(z) = \frac{\sin^3(z-1)}{(\text{Log } z)^4 [1 - \cos(z-1)]^2}$  ומצא את סדר 10

הקוטב.

ב. מצא מינימום ומקסימום של  $|z(z+2)|$  בעיגול  $\Delta\left(0, \frac{3}{2}\right)$  10

**בהצלחה!**

$$(1+i)^{1-2i} = e^{(1-2i) \log(1+i)} = e^{(1-2i) [\ln\sqrt{2} + i\frac{\pi}{4} + 2\pi i k]} = e^{\ln\sqrt{2} + \frac{\pi}{2} + 4\pi k + i(\frac{\pi}{4} + 2\pi k - 2\ln\sqrt{2})}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

גורם  $k \rightarrow \infty$  נקודת זריחה  $\infty$  ועליו  $k \rightarrow -\infty$  נקודת זריחה  $0$   
 כיוון  $e^{2\pi k} \neq 0$  נקודת זריחה  $0$  כיוון  $e^{2\pi k} \neq 0$

$$z^3 \frac{1}{z^2} = z^3 e^{-1/2 z^2} = z^3 \left[ 1 - \frac{1}{2} z^2 + \frac{1}{2!} z^4 - \frac{1}{3!} z^6 + \dots \right]$$

התקיים  $\frac{1}{z}$  קוטב פשוט  $\frac{1}{2}$   $2\pi i \cdot \frac{1}{2} = \pi i$   $\pi i$   $\frac{1}{z}$   $\frac{1}{z^2}$   $\frac{1}{z^3}$   $\frac{1}{z^4}$   $\frac{1}{z^5}$   $\frac{1}{z^6}$   $\frac{1}{z^7}$   $\frac{1}{z^8}$   $\frac{1}{z^9}$   $\frac{1}{z^{10}}$   $\frac{1}{z^{11}}$   $\frac{1}{z^{12}}$   $\frac{1}{z^{13}}$   $\frac{1}{z^{14}}$   $\frac{1}{z^{15}}$   $\frac{1}{z^{16}}$   $\frac{1}{z^{17}}$   $\frac{1}{z^{18}}$   $\frac{1}{z^{19}}$   $\frac{1}{z^{20}}$   $\frac{1}{z^{21}}$   $\frac{1}{z^{22}}$   $\frac{1}{z^{23}}$   $\frac{1}{z^{24}}$   $\frac{1}{z^{25}}$   $\frac{1}{z^{26}}$   $\frac{1}{z^{27}}$   $\frac{1}{z^{28}}$   $\frac{1}{z^{29}}$   $\frac{1}{z^{30}}$   $\frac{1}{z^{31}}$   $\frac{1}{z^{32}}$   $\frac{1}{z^{33}}$   $\frac{1}{z^{34}}$   $\frac{1}{z^{35}}$   $\frac{1}{z^{36}}$   $\frac{1}{z^{37}}$   $\frac{1}{z^{38}}$   $\frac{1}{z^{39}}$   $\frac{1}{z^{40}}$   $\frac{1}{z^{41}}$   $\frac{1}{z^{42}}$   $\frac{1}{z^{43}}$   $\frac{1}{z^{44}}$   $\frac{1}{z^{45}}$   $\frac{1}{z^{46}}$   $\frac{1}{z^{47}}$   $\frac{1}{z^{48}}$   $\frac{1}{z^{49}}$   $\frac{1}{z^{50}}$   $\frac{1}{z^{51}}$   $\frac{1}{z^{52}}$   $\frac{1}{z^{53}}$   $\frac{1}{z^{54}}$   $\frac{1}{z^{55}}$   $\frac{1}{z^{56}}$   $\frac{1}{z^{57}}$   $\frac{1}{z^{58}}$   $\frac{1}{z^{59}}$   $\frac{1}{z^{60}}$   $\frac{1}{z^{61}}$   $\frac{1}{z^{62}}$   $\frac{1}{z^{63}}$   $\frac{1}{z^{64}}$   $\frac{1}{z^{65}}$   $\frac{1}{z^{66}}$   $\frac{1}{z^{67}}$   $\frac{1}{z^{68}}$   $\frac{1}{z^{69}}$   $\frac{1}{z^{70}}$   $\frac{1}{z^{71}}$   $\frac{1}{z^{72}}$   $\frac{1}{z^{73}}$   $\frac{1}{z^{74}}$   $\frac{1}{z^{75}}$   $\frac{1}{z^{76}}$   $\frac{1}{z^{77}}$   $\frac{1}{z^{78}}$   $\frac{1}{z^{79}}$   $\frac{1}{z^{80}}$   $\frac{1}{z^{81}}$   $\frac{1}{z^{82}}$   $\frac{1}{z^{83}}$   $\frac{1}{z^{84}}$   $\frac{1}{z^{85}}$   $\frac{1}{z^{86}}$   $\frac{1}{z^{87}}$   $\frac{1}{z^{88}}$   $\frac{1}{z^{89}}$   $\frac{1}{z^{90}}$   $\frac{1}{z^{91}}$   $\frac{1}{z^{92}}$   $\frac{1}{z^{93}}$   $\frac{1}{z^{94}}$   $\frac{1}{z^{95}}$   $\frac{1}{z^{96}}$   $\frac{1}{z^{97}}$   $\frac{1}{z^{98}}$   $\frac{1}{z^{99}}$   $\frac{1}{z^{100}}$

$$f(z) = \frac{A}{z^2} + \frac{B}{z} + \dots \quad A \neq 0 \quad B = 0$$

$$f(z^2) = \frac{A}{z^4} + \frac{B}{z^2} + \dots$$

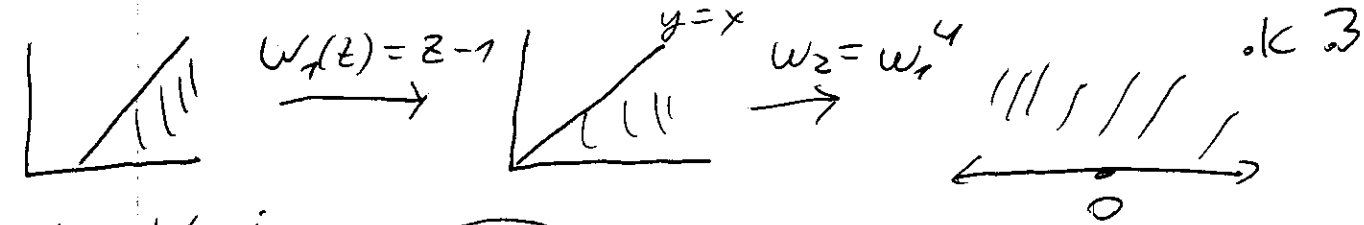
$$f(z)/z^2 = \frac{A}{z^4} + \frac{B}{z^3} + \dots$$

$$f(z^2) + \frac{f(z)}{z^2} = \frac{2A}{z^4} + \frac{B}{z^3} + \frac{B}{z^2} + \dots$$

$(2A \neq 0)$   $4$   $3$   $2$   $1$   $0$   $-1$   $-2$   $-3$   $-4$   $-5$   $-6$   $-7$   $-8$   $-9$   $-10$   $-11$   $-12$   $-13$   $-14$   $-15$   $-16$   $-17$   $-18$   $-19$   $-20$   $-21$   $-22$   $-23$   $-24$   $-25$   $-26$   $-27$   $-28$   $-29$   $-30$   $-31$   $-32$   $-33$   $-34$   $-35$   $-36$   $-37$   $-38$   $-39$   $-40$   $-41$   $-42$   $-43$   $-44$   $-45$   $-46$   $-47$   $-48$   $-49$   $-50$   $-51$   $-52$   $-53$   $-54$   $-55$   $-56$   $-57$   $-58$   $-59$   $-60$   $-61$   $-62$   $-63$   $-64$   $-65$   $-66$   $-67$   $-68$   $-69$   $-70$   $-71$   $-72$   $-73$   $-74$   $-75$   $-76$   $-77$   $-78$   $-79$   $-80$   $-81$   $-82$   $-83$   $-84$   $-85$   $-86$   $-87$   $-88$   $-89$   $-90$   $-91$   $-92$   $-93$   $-94$   $-95$   $-96$   $-97$   $-98$   $-99$   $-100$

האם  $A$   $B$   $C$   $D$   $E$   $F$   $G$   $H$   $I$   $J$   $K$   $L$   $M$   $N$   $O$   $P$   $Q$   $R$   $S$   $T$   $U$   $V$   $W$   $X$   $Y$   $Z$   $AA$   $AB$   $AC$   $AD$   $AE$   $AF$   $AG$   $AH$   $AI$   $AJ$   $AK$   $AL$   $AM$   $AN$   $AO$   $AP$   $AQ$   $AR$   $AS$   $AT$   $AU$   $AV$   $AW$   $AX$   $AY$   $AZ$   $BA$   $BB$   $BC$   $BD$   $BE$   $BF$   $BG$   $BH$   $BI$   $BJ$   $BK$   $BL$   $BM$   $BN$   $BO$   $BP$   $BQ$   $BR$   $BS$   $BT$   $BU$   $BV$   $BW$   $BX$   $BY$   $BZ$   $CA$   $CB$   $CC$   $CD$   $CE$   $CF$   $CG$   $CH$   $CI$   $CJ$   $CK$   $CL$   $CM$   $CN$   $CO$   $CP$   $CQ$   $CR$   $CS$   $CT$   $CU$   $CV$   $CW$   $CX$   $CY$   $CZ$   $DA$   $DB$   $DC$   $DD$   $DE$   $DF$   $DG$   $DH$   $DI$   $DJ$   $DK$   $DL$   $DM$   $DN$   $DO$   $DP$   $DQ$   $DR$   $DS$   $DT$   $DU$   $DV$   $DW$   $DX$   $DY$   $DZ$   $EA$   $EB$   $EC$   $ED$   $EE$   $EF$   $EG$   $EH$   $EI$   $EJ$   $EK$   $EL$   $EM$   $EN$   $EO$   $EP$   $EQ$   $ER$   $ES$   $ET$   $EU$   $EV$   $EW$   $EX$   $EY$   $EZ$   $FA$   $FB$   $FC$   $FD$   $FE$   $FF$   $FG$   $FH$   $FI$   $FJ$   $FK$   $FL$   $FM$   $FN$   $FO$   $FP$   $FQ$   $FR$   $FS$   $FT$   $FU$   $FV$   $FW$   $FX$   $FY$   $FZ$   $GA$   $GB$   $GC$   $GD$   $GE$   $GF$   $GG$   $GH$   $GI$   $GJ$   $GK$   $GL$   $GM$   $GN$   $GO$   $GP$   $GQ$   $GR$   $GS$   $GT$   $GU$   $GV$   $GW$   $GX$   $GY$   $GZ$   $HA$   $HB$   $HC$   $HD$   $HE$   $HF$   $HG$   $HH$   $HI$   $HJ$   $HK$   $HL$   $HM$   $HN$   $HO$   $HP$   $HQ$   $HR$   $HS$   $HT$   $HU$   $HV$   $HW$   $HX$   $HY$   $HZ$   $IA$   $IB$   $IC$   $ID$   $IE$   $IF$   $IG$   $IH$   $II$   $IJ$   $IK$   $IL$   $IM$   $IN$   $IO$   $IP$   $IQ$   $IR$   $IS$   $IT$   $IU$   $IV$   $IW$   $IX$   $IY$   $IZ$   $JA$   $JB$   $JC$   $JD$   $JE$   $JF$   $JG$   $JH$   $JI$   $JJ$   $JK$   $JL$   $JM$   $JN$   $JO$   $JP$   $JQ$   $JR$   $JS$   $JT$   $JU$   $JV$   $JW$   $JX$   $JY$   $JZ$   $KA$   $KB$   $KC$   $KD$   $KE$   $KF$   $KG$   $KH$   $KI$   $KJ$   $KL$   $KM$   $KN$   $KO$   $KP$   $KQ$   $KR$   $KS$   $KT$   $KU$   $KV$   $KW$   $KX$   $KY$   $KZ$   $LA$   $LB$   $LC$   $LD$   $LE$   $LF$   $LG$   $LH$   $LI$   $LJ$   $LK$   $LL$   $LM$   $LN$   $LO$   $LP$   $LQ$   $LR$   $LS$   $LT$   $LU$   $LV$   $LW$   $LX$   $LY$   $LZ$   $MA$   $MB$   $MC$   $MD$   $ME$   $MF$   $MG$   $MH$   $MI$   $MJ$   $MK$   $ML$   $MM$   $MN$   $MO$   $MP$   $MQ$   $MR$   $MS$   $MT$   $MU$   $MV$   $MW$   $MX$   $MY$   $MZ$   $NA$   $NB$   $NC$   $ND$   $NE$   $NF$   $NG$   $NH$   $NI$   $NJ$   $NK$   $NL$   $NM$   $NN$   $NO$   $NP$   $NQ$   $NR$   $NS$   $NT$   $NU$   $NV$   $NW$   $NX$   $NY$   $NZ$   $OA$   $OB$   $OC$   $OD$   $OE$   $OF$   $OG$   $OH$   $OI$   $OJ$   $OK$   $OL$   $OM$   $ON$   $OO$   $OP$   $OQ$   $OR$   $OS$   $OT$   $OU$   $OV$   $OW$   $OX$   $OY$   $OZ$   $PA$   $PB$   $PC$   $PD$   $PE$   $PF$   $PG$   $PH$   $PI$   $PJ$   $PK$   $PL$   $PM$   $PN$   $PO$   $PP$   $PQ$   $PR$   $PS$   $PT$   $PU$   $PV$   $PW$   $PX$   $PY$   $PZ$   $QA$   $QB$   $QC$   $QD$   $QE$   $QF$   $QG$   $QH$   $QI$   $QJ$   $QK$   $QL$   $QM$   $QN$   $QO$   $QP$   $QQ$   $QR$   $QS$   $QT$   $QU$   $QV$   $QW$   $QX$   $QY$   $QZ$   $RA$   $RB$   $RC$   $RD$   $RE$   $RF$   $RG$   $RH$   $RI$   $RJ$   $RK$   $RL$   $RM$   $RN$   $RO$   $RP$   $RQ$   $RR$   $RS$   $RT$   $RU$   $RV$   $RW$   $RX$   $RY$   $RZ$   $SA$   $SB$   $SC$   $SD$   $SE$   $SF$   $SG$   $SH$   $SI$   $SJ$   $SK$   $SL$   $SM$   $SN$   $SO$   $SP$   $SQ$   $SR$   $SS$   $ST$   $SU$   $SV$   $SW$   $SX$   $SY$   $SZ$   $TA$   $TB$   $TC$   $TD$   $TE$   $TF$   $TG$   $TH$   $TI$   $TJ$   $TK$   $TL$   $TM$   $TN$   $TO$   $TP$   $TQ$   $TR$   $TS$   $TT$   $TU$   $TV$   $TW$   $TX$   $TY$   $TZ$   $UA$   $UB$   $UC$   $UD$   $UE$   $UF$   $UG$   $UH$   $UI$   $UJ$   $UK$   $UL$   $UM$   $UN$   $UO$   $UP$   $UQ$   $UR$   $US$   $UT$   $UU$   $UV$   $UW$   $UX$   $UY$   $UZ$   $VA$   $VB$   $VC$   $VD$   $VE$   $VF$   $VG$   $VH$   $VI$   $VJ$   $VK$   $VL$   $VM$   $VN$   $VO$   $VP$   $VQ$   $VR$   $VS$   $VT$   $VU$   $VV$   $VW$   $VX$   $VY$   $VZ$   $WA$   $WB$   $WC$   $WD$   $WE$   $WF$   $WG$   $WH$   $WI$   $WJ$   $WK$   $WL$   $WM$   $WN$   $WO$   $WP$   $WQ$   $WR$   $WS$   $WT$   $WU$   $WV$   $WW$   $WX$   $WY$   $WZ$   $XA$   $XB$   $XC$   $XD$   $XE$   $XF$   $XG$   $XH$   $XI$   $XJ$   $XK$   $XL$   $XM$   $XN$   $XO$   $XP$   $XQ$   $XR$   $XS$   $XT$   $XU$   $XV$   $XW$   $XX$   $XY$   $XZ$   $YA$   $YB$   $YC$   $YD$   $YE$   $YF$   $YG$   $YH$   $YI$   $YJ$   $YK$   $YL$   $YM$   $YN$   $YO$   $YP$   $YQ$   $YR$   $YS$   $YT$   $YU$   $YV$   $YW$   $YX$   $YY$   $YZ$   $ZA$   $ZB$   $ZC$   $ZD$   $ZE$   $ZF$   $ZG$   $ZH$   $ZI$   $ZJ$   $ZK$   $ZL$   $ZM$   $ZN$   $ZO$   $ZP$   $ZQ$   $ZR$   $ZS$   $ZT$   $ZU$   $ZV$   $ZW$   $ZX$   $ZY$   $ZZ$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = N - P$$



$$w_3 = \frac{w_2 - i}{w_2 + i}$$

$$f(z) = w_3 \circ w_2 \circ w_1(z) = \frac{(z-1)^4 - i}{(z-1)^4 + i}$$



$\int_{-\epsilon}^{\epsilon} \frac{\sin x}{x} dx \rightarrow 0 < \epsilon$  ,  $\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$  !  $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \pi$

$1 - \cos(z-1) = 2 \sin^2 \frac{z-1}{2}$       $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sin z}{z} = 1$       $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\log(1+z)}{z} = 1$

$f(z) = \frac{\sin^3(z-1) (z-1)^4}{(z-1)^3 (\log(1+z-1))^4} \cdot \frac{((z-1)/2)^4}{(2 \sin^2 \frac{z-1}{2})^2} \cdot \frac{(z-1)^3 \cdot 16}{(z-1)^4 (z-1)^4}$

נמצא את הנקודה  $z=1$  והתגובה היא  $\frac{1}{4}$ .  
 נמצא את הנקודה  $z=1$  והתגובה היא  $\frac{1}{4}$ .

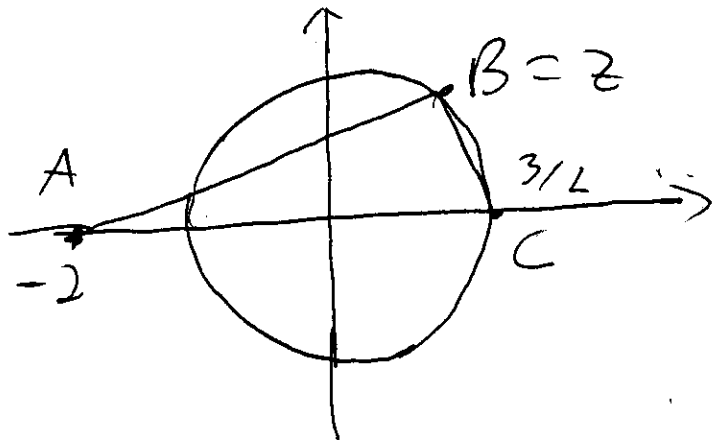
האם הנשוא הוא 0 והתגובה  $z=0$ .

האם  $\max$  או  $\min$  של הפונקציה?

האם  $|z+2| = \frac{3}{2}$  , האם ההכרחי של  $z$

$|z| = \frac{3}{2}$  , האם ההכרחי של  $z$

$z_0 = \frac{3}{2}$  , האם  $-2$



האם הנשוא הוא AC או ABC?

$\frac{3}{2} \left| \frac{3}{2} + 2 \right| = \frac{21}{4}$