אלגברה לינארית הרחבת הסמכה (בן גוריון), סמסטר ב' תש"פ, מועד א'

8.7.2020, ט"ז תמוז תש"פ

מרצה: אחיה בר-און.
מתרגל: ד"ר דניס גלוקו.
אורך המבחן: 3 שעות.
חומר עזר: מחשבון פשוט בלבד.
הנחיות:

- יש לענות על **כל** 4 השאלות .
- סך הנקודות במבחן הוא 120. ציון מעל 100 יעוגל ל 100.
- השאלות לא מסודרות בהכרח לפי רמת קושי- מומלץ להתחיל עם שאלות שאתם יודעים לפתור.
- נמקו תשובתכם. תשובה ללא נימוק, גם אם נכונה, לא תתקבל.

.

המלצה: הסתכלו על כל השאלות והתחילו עם השאלות שאתם יודעים לענות. חלקו את זמנכם בתבונה!

בהצלחה! ☺

1. (30 נק')

(א) (23 נק') נתונה מערכת משוואות לינאריות (מעל $\mathbb{R}$)

$$\begin{cases} x+ky-kz &= 1 \\ y+kz &= -1 \\ kx+\left(k^2-4\right)y+3z &= 2k+7 \end{cases}$$

התלויה בפרמטר k.

i. (15 נק') קבעו לאילו ערכי k למערכת יש פתרון יחיד, אין פתרון או אינסוף פתרונות. נמקו תשובתכם.

פתרון: נכניס למטריצה ונדרג

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & k & -k & 1 \\ 0 & 1 & k & -1 \\ k & k^2-4 & 3 & 2k+7 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3\leftarrow R_3-kR_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & k & -k & 1 \\ 0 & 1 & k & -1 \\ 0 & -4 & k^2+3 & k+7 \end{array}\right)$$
$$\xrightarrow{R_3\leftarrow R_3+4R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & k & -k & 1 \\ 0 & 1 & k & -1 \\ 0 & 0 & k^2+4k+3 & k+3 \end{array}\right)$$
$$= \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & k & -k & 1 \\ 0 & 1 & k & -1 \\ 0 & 0 & (k+1)(k+3) & k+3 \end{array}\right)$$

כעת, אם $k=-1$ נקבל את המערכת

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

שיש בה שורת סתירה בשורה השלישית ולכן אין פתרון במקרה זה.
אם $k=-3$ נקבל את המערכת

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

שהיא מדורגת, ללא שורת סתירה ועם משתנה חופשי (x_3) ולכן במקרה זה נקבל אינסוף פתרונות.
אחרת, $k\neq-1$ וגם $k\neq-3$ נקבל מערכת מדורגת, ללא משתנים חופשיים וללא שורת סתירה ולכן במקרה זה יהיה פתרון יחיד. לסיכום: עבור $k=-3$ יש אינסוף פתרונות, $k=-1$ אין פתרון ועבור כל k אחר יהיה פתרון יחיד.

ii. (8 נק') עבור ערכי k עבורם למערכת יש אינסוף פתרונות - מצאו את כל הפתרונות למערכת.

פתרון: בסעיף הקודם מצאנו כי $k=-3$ זה המקרה היחידי בו יש אינסוף פתרונות והגענו למטריצה מדורגת

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

שאפשר להמשיך לדרג אותה לצורה קנונית

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1\leftarrow R_1+3R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -6 & -2 \\ 0 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

ולקבל שכל הפתרונות (נסמן את המשתנה החופשי $z=t$) הן

$$\left\{\begin{pmatrix}6t-2\\3t-1\\t\end{pmatrix}\mid t\in\mathbb{R}\right\}=\begin{pmatrix}-2\\-1\\0\end{pmatrix}+\operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix}6\\3\\1\end{pmatrix}\mid t\in\mathbb{R}\right\}$$

כנדרש בשאלה.

(ב) (7 נק') יהא V מ"ו ויהיו W_1,W_2,W_3 ת"מ. הוכיחו/הפריכו: אם $W_1+W_2=W_1+W_3$ אזי $W_2=W_3$.

פתרון: הפרכה. למשל ב $V=\mathbb{R}^2$ ותתי המרחבים

$$W_1=\operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right\},W_2=\operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right\},W_3=\operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right\}$$

מתקיים כי

$$W_1+W_2=\operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right\}+\operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right\}=\operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right\}=\mathbb{R}^2$$

$$W_1+W_3=\operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right\}+\operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right\}=\operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right\}=\mathbb{R}^2$$

אבל $W_2\neq W_3$.

2. (25 נק') תהא

$$A=\begin{pmatrix}2&0&1\\0&2&1\\2&1&0\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{3\times 3}$$

מטריצה הפיכה.

(א) (15 נק') מצאו את ההופכית שלה A^{-1}.

פתרון: נשתמש באלגוריתם למציאת הופכית

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}2&0&1&1&0&0\\0&2&1&0&1&0\\2&1&0&0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow{R_3\leftarrow R_3-R_1}\left(\begin{array}{ccc|ccc}2&0&1&1&0&0\\0&2&1&0&1&0\\0&1&-1&-1&0&1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_3\leftarrow R_3-\frac{1}{2}R_2}\left(\begin{array}{ccc|ccc}2&0&1&1&0&0\\0&2&1&0&1&0\\0&0&-\frac{3}{2}&-1&-\frac{1}{2}&1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_3\leftarrow\frac{-2}{3}R_3}\left(\begin{array}{ccc|ccc}2&0&1&1&0&0\\0&2&1&0&1&0\\0&0&1&\frac{2}{3}&\frac{1}{3}&-\frac{2}{3}\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[R_1\leftarrow\frac{1}{2}R_1]{R_2\leftarrow\frac{1}{2}R_2}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&0&0\\0&1&\frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}&0\\0&0&1&\frac{2}{3}&\frac{1}{3}&-\frac{2}{3}\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_2\leftarrow R_2-\frac{1}{2}R_3}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&0&0\\0&1&0&-\frac{1}{3}&\frac{1}{3}&\frac{1}{3}\\0&0&1&\frac{2}{3}&\frac{1}{3}&-\frac{2}{3}\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_1\leftarrow R_1-\frac{1}{2}R_3}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&\frac{1}{2}&\frac{1}{6}&-\frac{1}{6}&\frac{1}{3}\\0&1&0&-\frac{1}{3}&\frac{1}{3}&\frac{1}{3}\\0&0&1&\frac{2}{3}&\frac{1}{3}&-\frac{2}{3}\end{array}\right)$$

ולכן

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{6} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{3}\\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3}\\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3}\end{pmatrix}=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}1 & -1 & 2\\ -2 & 2 & 2\\ 4 & 2 & -4\end{pmatrix}$$

(ב) (10 נק') האם $A^{100}=A^{102}$? נמקו תשובתכם.

פתרון: לא. נניח בשלילה כי $A^{100}=A^{102}$ ונכפיל ב $\left(A^{-1}\right)^{101}$ ונקבל כי $A^{-1}=A$ בסתירה לחישוב שלנו בסעיף הקודם.

3. (25 נק')

(א) (18 נק') יהיו

$$A_1=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 2k & 1\end{pmatrix},A_2=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & k\end{pmatrix},A_3=\begin{pmatrix}0 & -2\\ 0 & -k\end{pmatrix},A_4=\begin{pmatrix}2 & k\\ 2 & 1\end{pmatrix}$$

מטריצות ב $\mathbb{R}^{2\times2}$ התלויות בפרמטר k. עבור אילו ערכי k מתקיים כי $\{A_1,A_2,A_3,A_4\}$ בסיס של $\mathbb{R}^{2\times2}$? נמקו תשובתכם.

פתרון: כיוון ש $\dim\mathbb{R}^{2\times2}=4$, לפי המשפט השלישי חינם, מספיק לבדוק ש $\{A_1,A_2,A_3,A_4\}$ בת"ל (כי בקבוצה זו 4 איברים).
ניקח צירוף לינארי ששוה למטריצת האפס

$$\alpha_1A_1+\alpha_2A_2+\alpha_3A_3+\alpha_4A_4=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

ונבדוק מתי הוא חייב להיות הצירוף הלינארי הטריוואלי (כלומר מתי בהכרח $\alpha_1=0,\alpha_2=0,\alpha_3=0,\alpha_4=0$) משיוויון הרכיבים של המטריצות משני צידי השיוויון נקבל את המערכת

$$\begin{cases}2\alpha_1+2\alpha_4 & =0\\ -\alpha_2-2\alpha_3+k\alpha_4 & =0\\ 2k\alpha_1+\alpha_2+2\alpha_4 & =0\\ \alpha_1+k\alpha_2-k\alpha_3+\alpha_4 & =0\end{cases}$$

ונדרג את המטריצה המייצגת אותה:

$$\left(\begin{array}{cccc|c}2 & 0 & 0 & 2 & 0\\ 0 & -1 & -2 & k & 0\\ 2k & 1 & 0 & 2 & 0\\ 1 & k & -k & 1 & 0\end{array}\right)\xrightarrow[R_4\leftarrow R_4-\frac{1}{2}R_1]{R_3\leftarrow R_3-kR_1}\left(\begin{array}{cccc|c}2 & 0 & 0 & 2 & 0\\ 0 & -1 & -2 & k & 0\\ 0 & 1 & 0 & 2-2k & 0\\ 0 & k & -k & 0 & 0\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[R_4\leftarrow R_4+kR_2]{R_3\leftarrow R_3+R_2}\left(\begin{array}{cccc|c}2 & 0 & 0 & 2 & 0\\ 0 & -1 & -2 & k & 0\\ 0 & 0 & -2 & 2-k & 0\\ 0 & 0 & -3k & k^2 & 0\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_4\leftarrow R_4-\frac{3k}{2}R_2}\left(\begin{array}{cccc|c}2 & 0 & 0 & 2 & 0\\ 0 & -1 & -2 & k & 0\\ 0 & 0 & -2 & 2-k & 0\\ 0 & 0 & 0 & k^2-\frac{3k}{2}(2-k) & 0\end{array}\right)$$

כעת, יהיה רק את פתרון הטריאלי אמ"מ בכל עמודה יהיה איבר מוביל (כלומר לא יהיו משתנים חופשיים) אמ"מ $k^2-\frac{3k}{2}(2-k)\neq0$. הפתרונות לשיוון

$$0=k^2-\frac{3k}{2}(2-k)=\frac{5}{2}k^2-3k=k\left(\frac{5}{2}k-3\right)$$

הם $k=0$ או $k=\frac{6}{5}$ ולכן התשובה הסופית לשאלה היא $k\neq0,\frac{6}{5}$.

(ב) (7 נק') יהא V מ"ו ויהיו $v_1, v_2, v_3 \in V$ בת"ל. הוכיחו/הפריכו: שלושת הוקטורים $v_1 + v_2, v_2 + v_3, v_1 + v_3$ גם כן בת"ל.

פתרון: הוכחה. נניח

$$\alpha_1 (v_1 + v_2) + \alpha_2 (v_2 + v_3) + \alpha_3 (v_1 + v_3) = 0$$

ונראה כי זהו הצירוף הלינארי הטרוואלי. אכן, נסדר את השיוויון בצורה

$$(\alpha_1 + \alpha_3) v_1 + (\alpha_1 + \alpha_2) v_2 + (\alpha_2 + \alpha_3) v_3 = 0$$

ובגלל ש v_1, v_2, v_3 בת"ל, נקבל כי $\alpha_1 + \alpha_3 = 0, \alpha_1 + \alpha_2 = 0, \alpha_2 + \alpha_3 = 0$. נפתור את המערכת ע"י דירוג:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

ונקבל כי הפתרון הטריוואלי הוא הפתרון היחיד (אין משתנים חופשיים).

4. (40 נק')

(א) (30 נק') יהיו

$$W_1 = \text{Null}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -3 & 2 \end{pmatrix}, W_2 = \text{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$$

תתי מרחבים של $\mathbb{R}^4$ (תזכורת: עבור מטריצה A, מסמנים ב $\text{Null}A$ את כל הפתרונות למערכת ההומוגנית $Ax = 0$).

i. (15 נק') הציגו את W_2 לפי משוואות ומצאו את המימד שלו.

פתרון: נשווה לוקטור כללי ונבדוק מתי אין שורת סתירה:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & x_1 \\ 2 & -4 & -5 & x_2 \\ 2 & -2 & -2 & x_3 \\ 3 & 1 & 3 & x_4 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 \leftarrow R_2 - 2R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & x_1 \\ 0 & -6 & -9 & x_2 - 2x_1 \\ 2 & -2 & -2 & x_3 \\ 3 & 1 & 3 & x_4 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[R_4 \leftarrow R_4 - 3R_1]{R_3 \leftarrow R_3 - 2R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & x_1 \\ 0 & -6 & -9 & x_2 - 2x_1 \\ 0 & -4 & -6 & x_3 - 2x_1 \\ 0 & -2 & -3 & x_4 - 3x_1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[R_4 \leftarrow R_4 - \frac{1}{3}R_2]{R_3 \leftarrow R_3 - \frac{2}{3}R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & x_1 \\ 0 & -6 & -9 & x_2 - 2x_1 \\ 0 & 0 & 0 & x_3 - 2x_1 - \frac{2}{3}(x_2 - 2x_1) \\ 0 & 0 & 0 & x_4 - 3x_1 - \frac{1}{3}(x_2 - 2x_1) \end{array}\right)$$

$$= \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & x_1 \\ 0 & -6 & -9 & x_2 - 2x_1 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{2}{3}x_1 - \frac{2}{3}x_2 + x_3 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{7}{3}x_1 - \frac{1}{3}x_2 + x_4 \end{array}\right)$$

ולכן

$$W_2=\left\{\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}\ \middle|\ \begin{array}{c}-\frac{2}{3}x_1-\frac{2}{3}x_2+x_3=0\\-\frac{7}{3}x_1-\frac{1}{3}x_2+x_4=0\end{array}\right\}$$
$$=\left\{\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}\ \middle|\ \begin{array}{c}2x_1+2x_2-3x_3=0\\7x_1+x_2-3x_4=0\end{array}\right\}$$
$$=\mathrm{Null}\begin{pmatrix}2&2&-3&0\\7&1&0&-3\end{pmatrix}$$

אחרי פעולת דירוג $\begin{pmatrix}2&2&-3&0\\0&-6&10.5&-3\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}2&2&-3&0\\7&1&-3&0\end{pmatrix}$ רואים שיש 2 משתנים חופשיים ולכן $\dim W_2=2$.

ii. (15 נק') מצאו בסיס ל $W_1\cap W_2$.

פתרון: החיתוך $W_1\cap W_2$ הוא אוסף הפתרונות למערכת שמורכבת מהמשוואות של W_1 ושל W_2. נדרג את המערכת הזאת:

$$\begin{pmatrix}2&2&0&-2\\0&0&-3&2\\2&2&-3&0\\7&1&0&-3\end{pmatrix}\xrightarrow[R_4\leftarrow R_4-3.5R_1]{R_2\leftarrow R_3-R_1}\begin{pmatrix}2&2&0&-2\\0&0&-3&2\\0&0&-3&2\\0&-6&0&4\end{pmatrix}$$
$$\xrightarrow{R_2\leftrightarrow R_4}\begin{pmatrix}2&2&0&-2\\0&-6&0&4\\0&0&-3&2\\0&0&-3&2\end{pmatrix}$$
$$\xrightarrow{R_4\leftarrow R_4-R_3}\begin{pmatrix}2&2&0&-2\\0&-6&0&4\\0&0&-3&2\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$
$$\rightarrow\begin{pmatrix}1&1&0&-1\\0&1&0&-\frac{2}{3}\\0&0&1&-\frac{2}{3}\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$
$$\xrightarrow{R_1\leftarrow R_1-R_2}\begin{pmatrix}1&0&0&-\frac{1}{3}\\0&1&0&-\frac{2}{3}\\0&0&1&-\frac{2}{3}\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

ולכן ($x_4=t$ חופשי)

$$W_1\cap W_2=\left\{\begin{pmatrix}\frac{1}{3}t\\\frac{2}{3}t\\\frac{2}{3}t\\t\end{pmatrix}\ \middle|\ t\in\mathbb{R}\right\}=\mathrm{span}\left\{\begin{pmatrix}\frac{1}{3}\\\frac{2}{3}\\\frac{2}{3}\\1\end{pmatrix}\right\}$$

ומתקיים כי $\left\{\begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$ בסיס ל $W_1 \cap W_2$.

(ב) (בונוס - 10 נק') יהא V מ"ו. הוכיחו כי כל שני $v_1, v_2 \in V$ שונים קובעים ישר יחיד. כלומר הוכיחו כי:

i. קיים ישר L כך ש $v_1, v_2 \in L$

ii. אם L' ישר המקיים כי $v_1, v_2 \in L'$ אז $L = L'$.

פתרון: נגדיר $L = v_1 + \text{span}\{v_2 - v_1\}$

- כיוון ש $0, v_2 - v_1 \in \text{span}\{v_2 - v_1\}$ נקבל כי $v_1 = v_1 + 0, v_2 = v_1 + (v_2 - v_1) \in v_1 + \text{span}\{v_2 - v_1\} = L$
- כיוון ש $v_1 \neq v_2$ נקבל כי $v_2 - v_1 \neq 0$ ולכן $\{v_2 - v_1\}$ בת"ל ולכן $\dim L = \dim \text{span}\{v_2 - v_1\} = 1$ וזהו אכן ישר.
- נניח כי $L' = v' + W'$ הוא ישר המקיים כי $v_1, v_2 \in L'$ אזי $L' = v_1 + W'$ ולכן $v_2 - v_1 \in W$ (כי $v_2 \in L'$). מכיוון ש $\text{span}\{v_2 - v_1\} \subseteq W'$ והם מאותו מימד (1) ולכן הם שווים. מכאן ש

$$L' = v' + W' = v_1 + \text{span}\{v_2 - v_1\} = L$$

ולכן יש רק ישר אחד המכיל את $\{v_1, v_2\}$ כנדרש.