

# תרגיל 7

## להגשה עד 1.1.17

### שאלה 1

יהיו  $(X, \mathbb{A}, \mu)$  ממ"ח,  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$  פונקציה ב- $L^1(\mu)$ . לכל  $t \in \mathbb{R}$  נגדיר:

$$F(t) := \int_X f(x) \cos(e^t f(x)) d\mu(x)$$

הוכיחו כי  $F$  מוגדרת ורציפה ב- $\mathbb{R}$ .

### שאלה 2

תהי  $(f_n)_{\mathbb{N}}$  סדרת פונקציות חסומות (כל אחת בנפרד) מ- $X$  ל- $\mathbb{R}$ , כך ש:  $f_n \rightarrow f$  במידה שווה מעל  $X$ .

1. הוכיחו כי  $\|f\|_U := \sup_{x \in X} |f(x)| < \infty$  (כלומר:  $f$  חסומה ב- $X$ ), וכי  $\sup_{n \in \mathbb{N}} \|f_n\|_U < \infty$ .

2. הוכיחו כי אם  $(X, \mathbb{A}, \mu)$  ממ"ח, וכל  $f_n$  מדידה ב- $\mathbb{A}$ , ו- $\mu(X) < \infty$  אז  $\int_X f_n d\mu \rightarrow \int_X f d\mu$ .

3. תנו דוגמא של ממ"ח  $(X, \mathbb{A}, \mu)$ , כך ש:  $\mu(X) = \infty$ , וסדרת פונקציות מדידות ב- $\mathbb{A}$ :  $(f_n)_{\mathbb{N}}$  כך ש- $f_n \rightarrow f$  במידה שווה, אבל  $\int_X f_n d\mu \not\rightarrow \int_X f d\mu$ .

### שאלה 3

יהיו  $(X, \mathbb{A}, \mu)$  ממ"ח,  $a \in (0, \infty)$ ,  $f: X \rightarrow [0, \infty]$  פונקציה מדידה כך ש:

$$0 < c := \int_X f d\mu < \infty$$

הוכיחו כי

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X n \log \left( 1 + \left( \frac{f}{n} \right)^a \right) d\mu = \begin{cases} c & a = 1 \\ \infty & 0 < a < 1 \\ 0 & 1 < a < \infty \end{cases}$$

תזכורת: אם  $0 \leq t$  ו- $1 \leq a$  אז  $1 + t^a \leq (1+t)^a \leq e^{at}$ .

### שאלה 4

יהי  $(X, S, \mu)$  ממ"ח סופית. הוכיחו כי פונקציה מדידה ואי שלילית היא אינטגרבילית אם

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu(\{x : f(x) \geq n\}) < \infty$$

### שאלה 5

יהי  $(X, S, \mu)$  מ"ח סופית ותהי  $f \in L^1(\mu)$  אי שלילית. הראו שמתקיים:

$$\lim_{\alpha \rightarrow 1^-} \int_X f^\alpha d\mu = \int_X f d\mu$$

### שאלה 6

יהי  $(\mathbb{R}^2, \mathbf{B}(\mathbb{R}^2))$  המרחב המדיד של המישור עם  $\sigma$  אלגברה בורל. נגדיר את הפונקציה

$$f(x, y) := \begin{cases} 1 & 0 \leq x \text{ and } x \leq y < x + 1 \\ -1 & 0 \leq x \text{ and } x + 1 \leq y < x + 2 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

הראו כי  $\int \int f(x, y) dm(x) dm(y) \neq \int \int f(x, y) dm(y) dm(x)$ . מדוע אין זו סתירה למשפט פוביני?

### שאלה 7

$$I := \int_0^\infty e^{-\frac{x^2}{2}} dm(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

הוכיחו כי: הדרכה: חשבו קודם את  $I^2$  ע"י מעבר לקואורדינטות פולריות.

**בהצלחה!!**