הגדרה

יהיו X וY שני מרחבים נורמיים מעל השדה K.
טרנספורמציה(או אופרטור) ליניארית $T : X \to Y$ היא טרנספורמציה המקיימת

$$T\left(x_1 + cx_2\right) = T\left(x_1\right) + cT\left(x_2\right)$$

קל להוכיח שכל טרנספורמציה ליניארית על $\mathbb{R}^n$ או $\mathbb{C}^n$ רציפה בנורמה האוקלידית.
במרחבים נורמיים ממימד ∞ יש הרבה דוגמאות של טרנספורמציות ליניאריות ולא רציפות.

דוגמה פשוטה

נגדיר

$$X = C\left([0,1]\right) = \left\{f : [0,1] \to \mathbb{R} | f \text{ is continouus}\right\}$$

$$\|f\| = \max_{0 \le x \le 1} |f\left(x\right)|$$

נגדיר $C' \subset C\left([0,1]\right)$ להיות תת המרחב של $C\left([0,1]\right)$ המכיל את כל הפונקציות בעלות נגזרת רציפה עם הנורמה של $C\left([0,1]\right)$.
נגדיר $T : C' \to \mathbb{R}$ ע"י $T\left(f\right) = f'\left(0\right)$. פשוט ש$T$ לינארית. T **לא רציפה** כי אם נגדיר $f_n \in C'$ ע"י $f_n\left(x\right) = \frac{\sin\left(n^2 x\right)}{n}$. אז $f_n \to 0$ במ"ש ב$[0,1]$ ולכן במובן של הנורמה $f_n \to 0$. **אבל**:

$$f_n'\left(x\right) = n\cos\left(n^2 x\right) \qquad f_n'\left(0\right) = n$$

ולכן $\lim_{n\to\infty} T\left(f_n\right) = \lim_{n\to\infty} f_n'\left(0\right)$ אינו קיים.

הגדרה

יהיו X וY מרחבים נורמיים מעל K ותהי $T : X \to Y$ לינארית. נגדיר את הנורמה של T ע"י

$$\|T\| = \sup_{0 \ne x \in X} \frac{\|Tx\|_Y}{\|x\|_X} \overset{\text{exercise}}{=} \sup_{\|x\|=1} \|Tx\|_Y$$

אם $\|T\| < \infty$ אומרים שT חסומה.

משפט 5

יהיו X וY מרחבים נורמים מעל K, ותהי $T : X \to Y$ טרנספורמציה לינארית. אזי הטענות הבאות שקולות:

א. T חסומה.

ב. T רציפה במ"ש על כל X.

ג. T רציפה בנקודה אחת $x_0 \in X$.

ד. T רציפה באפס.

הוכחה

א$\Leftarrow$ב נתון:$\|T\| = M < \infty$. אם כן, לכל $x_1, x_2 \in X$

$$\|T(x_1) - T(x_2)\| = \|T(x_1 - x_2)\| \leq M\|x_1 - x_2\|$$

זה תנאי ליפשיץ שגורר רציפות במ"ש.

ב$\Leftarrow$ג טריוויאלי.

ג$\Leftarrow$ד נתון T רציפה בx_0, צ"ל T רציפה ב0. לצורך זה ניקח סדרה $\{x_n\} \subset X$ כך ש$x_n \to 0$. צריך להוכיח $T(x_n) \to T(0) = 0$. ובכן: כיוון ש$x_n \to 0$, $x_n + x_0 \to x_0$, ונתון שT רציפה בx_0 ולכן $T(x_0 + x_n) \to T(x_0)$, ז.א. $T(x_0) + T(x_n) \to T(x_0)$. נעביר אגף להסיק $T(x_n) \to 0$ ולכן T רציפה באפס.

ד$\Leftarrow$א כיוון שT רציפה באפס, קיים $\delta > 0$ כך שאם $\|x\| < \delta$ אזי $\|Tx\| < 1$. כעת ניקח $0 \neq x \in X$ כלשהו, ונגדיר $z = \frac{\delta x}{2\|x\|}$. לכן $\|z\| = \frac{\delta}{2} < \delta$. ממילא $\|Tz\| < 1$. ז.א. $\left\|T\left(\frac{\delta x}{2\|x\|}\right)\right\| < 1$. שקול:

$$\left\|\frac{\delta}{2\|x\|}Tx\right\| < 1$$

$$\frac{\delta}{2\|x\|}\|Tx\| < 1$$

$$\|Tx\| < \underbrace{\frac{2}{\delta}}_{=M<\infty}\|x\|$$

וT חסומה.

מרחבי מכפלה פנימית ומרחבי הילברט

הגדרה

יהי X מרחב וקטורי מעל K(=$\mathbb{R}$ או $\mathbb{C}$).
מכפלה סקלרית(מכפלה פנימית) היא פונקציה $K \to X \times X : (,)$ כך שלכל $x, y, z \in X$ ו$\alpha \in K$ מתקיים:

א. $(y, x) = \overline{(x, y)}$

ב. $(x+y,z)=(x,z)+(y,z)$

ג. $(\alpha x,y)=\alpha\,(x,y)$

ד. $(x,x)\geq 0$ עם שוויון רק עבור $x=0$.

תוצאות מיידיות

1. א' עם ב' $\Longleftarrow$ $(z,x+y)=(z,x)+(z,y)$
2. א' עם ג' $\Longleftarrow$ $(x,\alpha y)=\overline{\alpha}\,(x,y)$
3. ג' $\Longleftarrow$ לכל $x\in X$ $(x,0)=(0,x)=0$

הגדרה

X יחד עם מכפלה פנימית $(\,,\,)$ נקרא מרחב מכפלה פנימית(ממ"פ).

הגדרה

יהי X ממ"פ. לכל $x\in X$ נגדיר $\|x\|=(x,x)^{1/2}$, ומוכיחים בלינארית שזאת נורמה אמיתית.

משפט 1(אי שוויון קושי שווארץ)

יהי X ממ"פ. לכל $x,y\in X$

$$|(x,y)|\leq\|x\|\,\|y\|$$

הוכחה(אי שוויון המשולש)

דרך המלך להוכיח זאת היא

$$\|(x+y)\|^2=(x+y,x+y)=(x,x)+(x,y)+(y,x)+(y,y)=$$

$$=\|x\|^2+2\mathrm{Re}\,(x,y)+\|y\|^2\leq\|x\|^2+2\,|(x,y)|+\|y\|^2\leq$$

$$\overset{\text{cauchy-shwartz}}{\leq}\|x\|^2+2\,\|x\|\,\|y\|+\|y\|^2=(\|x\|+\|y\|)^2$$

$\blacksquare$

הערה

תוך כדי ההוכחה ראינו דבר שימושי:

$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\mathrm{Re}\,(x,y)$$

הערה

המכפלה הפנימית רציפה במובן זה שאם $\begin{matrix} x_n \to x \\ y_n \to y \end{matrix}$ בתוך X אז $(x_n, y_n) \to (x,y)$.

הוכחה: תרגיל

משפט 2(משפט המקבילית)

יהי X ממ"ם, ויהיו x וy וקטורים בX. אזי

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\,\|x\|^2 + 2\,\|y\|^2$$

הוכחה

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + \cancel{2\mathrm{Re}\,(x,y)} + \|x\|^2 + \|y\|^2 - \cancel{2\mathrm{Re}\,(x,y)}$$

■

מסקנה

היפה במשפט 2 הוא שזה טענה רק על הנורמה, אבל ההוכחה תלויה באופן עקרוני בזה שהנורמה מושרית ע"י מכפלה פנימית.

נובע מייד שאם Y נורמי שבו משפט המקבילית אינו נכון, אז אי אפשר להגדיר על Y מכפלה פנימית שתשרה את הנורמה.

וגם ההפך נכון(אבל לא טריוויאלי): אם משפט 2 מתקיים בY אז אפשר להגדיר על Y מכפלה פנימית שמשרה את הנורמה.

הגדרה

מרחב מכפלה פנימית שלם(במטריקה המושרית ע"י הנורמה) נקרא מרחב הילברט.

דוגמאות

1. $\mathbb{R}^n$ או $\mathbb{C}^n$ עם המכפלה הפנימית הקלאסית: אם $\begin{matrix} x=(x_1,x_2,\dots x_n) \\ y=(y_1,y_2,\dots y_n) \end{matrix}$ אז $(x,y)=$ $\sum_{k=1}^{n} x_k\overline{y}_k$.
2. ℓ^2=מרחב כל הסדרות $x=(x_n)$ כך ש $\|x\|_{\ell^2}=\left(\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|^2\right)^{1/2}\in$. עבור $\begin{matrix} x=(x_n) \\ y=(y_n) \end{matrix}$ ℓ^2, $(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}x_n\overline{y_n}$, וכבר הוכחנו שזה מרחב שלם, ולכן מרחב הילברט.
3. אם (X,S,μ) ממ"ח אז $L^2\left(\mathrm{d}\mu\right)$ מרחב הילברט ע"י מכפלה פנימית $(f,g)=$ $\int_X f\overline{g}\,\mathrm{d}\mu$.

הערה

עבור $p\neq 2$, $L^p\left(\mathrm{d}\mu\right)$(וגם $L^\infty\left(\mathrm{d}\mu\right)$) אינם מרחבי הילברט, וקל לבדוק שבהם משפט 2 נכשל.

גם $C\left(K\right)$ לא מרחב הילברט.

הגדרה

תת מרחב סגור(טופולוגית) הוא תת מרחב שכל סדרה בו שמתכנסת מתכנסת לתוכו.

דוגמה

בℓ^2 נגדיר תת־מרחב $S=\{x=(x_n)|x_n\neq 0 \text{ for finite number of } n\text{'s}\}$. אז S תת מרחב של ℓ^2, אבל הוא לא סגור, כל למעשה $\overline{S}=\ell^2\supsetneqq S$.

משפט 3

יהי H מרחב הילברט, ויהי $M\subseteq H$ תת מרחב סגור. אם $x\in H\backslash M$ אז קיים $y\in M$ יחיד כך ש$\|x-y\|$(=$\mathrm{dist}\left(x,y\right)$) מינימלי מתוך $\{\|z-x\||z\in Y\}$. יתר על כן $x-y$ אורתוגונלית לm, במובן שלכל $z\in M$ $(x-y,z)=0$.

הוכחה

נגדיר

$$0<d=\mathrm{dist}\left(x,M\right)=\inf\left\{\|x-y\|:z\in M\right\}$$

(כיוון שM סגור ו$x\notin M$, $0<d$)

לפי הגדרת הinf, קיימת סדרה $\{y_n\}\subset M$ כך ש$\lim_{n\to\infty}\|x-y_n\|=d$.

טענה: $\{y_n\}$ סדרת קושי.

הוכחה: עבור $m,n\in\mathbb{N}$,

$$\left\|y_m-y_n\right\|^2=\left\|(y_m-x)+(x-y_n)\right\|^2\overset{\text{Theorem 2}}{=}2\left\|y_m-x\right\|^2+2\left\|y_n-x\right\|^2-\left\|y_m+y_n-2x\right\|^2$$

כיוון ש$y_m,y_n\in M$, גם $\frac{y_m+y_n}{2}\in M$. נובע ש$d\leq\left\|\frac{y_m+y_n}{2}-x\right\|$, לכן $\left\|y_m+y_n-2x\right\|^2\geq 4d^2$. נחזור למעלה:

$$\left\|y_m-y_n\right\|^2\leq 2\left\|y_m-x\right\|^2+2\left\|y_n-x\right\|^2-4d^2$$

לפי הבחירה של $\{y_m\}$, $\lim\limits_{m\to\infty}\left\|y_m-x\right\|^2=d$, לכן $\lim\limits_{m,n\to\infty}\left\|y_m-y_n\right\|^2\leq 2d^2+2d^2-4d^2=0$, וזה מוכיח את הטענה ש$\{y_n\}$קושי. כיוון ש$H$ מרחב הילברט(ז.א. שלם) קיים גבול $y=\lim\limits_{n\to\infty}y_n$, וכיוון שכל $y_n\in M$ וM סגור גם $y\in M$, וכיוון שהנורמה רציפה

$$\left\|y-x\right\|=\lim_{n\to\infty}\left\|y_n-x\right\|=d$$

ולכן $\left\|x-y\right\|$ מינימלי.

טענה: y יחיד.

הוכחה: אם קיים $w\in\mathbb{N}$ כך ש$\left\|w-x\right\|=d$ נפעיל אי שוויון לעיל(עבור y_n,y_m) במקרה של w וy לומר

$$\left\|w-y\right\|^2\leq 2\underbrace{\left\|w-x\right\|^2}_{=d}+2\underbrace{\left\|y-x\right\|^2}_{=d}-4d^2=2d^2+2d^2-4d^2=0$$

ז.א. $w=y$ וy יחיד.

טענה: $x-y$ אורתוגונלית לM.

הוכחה: מספיק להוכיח שאם $z\in M$ ואם $\left\|z\right\|=1$ אז $(x-y,z)=0$.
ובכן: אם $\alpha\in K$

$$\operatorname{dist}(x,y+\alpha z)\geq\underbrace{\operatorname{dist}(x,y)}_{=\min}$$

ז.א.

$$\cancel{\left\|x-y\right\|^2}\leq\left\|x-(y+\alpha z)\right\|^2=\left\|(x-y)-\alpha z\right\|^2=\left\|x-y\right\|^2+\left\|\alpha z\right\|^2-2\mathrm{Re}\overline{\alpha}\,(x-y,z)=$$

$$=\cancel{\left\|x-y\right\|^2}+\left|\alpha\right|^2-2\mathrm{Re}\overline{\alpha}\,(x-y,z)$$

(כי $\left\|z\right\|=1$)

$$2\mathrm{Re}\overline{\alpha}\,(x-y,z)\leq\left|\alpha\right|^2$$

כעת נבחר $\alpha=(x-y,z)$ ונסיק עבור אותו α

$$2\left|\alpha\right|^2=2\mathrm{Re}\overline{\alpha}\underbrace{(x-y,t)}_{=\alpha}\leq\left|\alpha\right|^2$$

$$\Longrightarrow \alpha = 0 \Longrightarrow (x-y,z) = 0$$

$\blacksquare$

משפט 4(משפט ההצגה של ריס)

יהי H מרחב הילברט ויהי $y \in H$ וקטור כלשהו. נגדיר $f_y : H \to K$ ע"י $f_y(x) = (x,y)$.
אזי f_y לינארי וחסום ומתקיים $\|f_y\| = \|y\|_H$ ולהיפך: אם $f : X \to K$ לינארי וחסום אז קיים $y \in H$ יחיד כך ש$f = f_y$.

הוכחה

תחילה ניקח $y \in H$ כלשהו ונגדיר $f_y(x) = (x,y)$. f_y לינארי כי

$$f_y(x_1 + cx_2) = (x_1 + cx_2, y) = (x_1, y) + c(x_2, y) = f_y(x_1) + cf_y(x_2)$$

f_y חסום כי לכל $x \in H$ $|f_y(x)| = |(x,y)| \le \underbrace{\|y\|}_{=M}\|x\|$. בזה הוכחנו ש$f_y$ חסום ו$\|f_y\| \le \|y\|_H$.

כעת, אם $y = 0$, $f_y = 0$ ו$\|f_y\| = 0 = \|y\|_H$, ואם $y \neq 0$ הרי

$$\|f_y\| \ge \frac{|f_y(y)|}{\|y\|} = \frac{|(y,y)|}{\|y\|} = \frac{\|y\|^2}{\|y\|} = \|y\|$$

נובע: $\|f_y\| = \|y\|_H$.

מצד שני, אם $f : H \to K$ לינארי ורציף יתכן ש$f \equiv 0$ ואז $f = f_0$, אבל אם $f \not\equiv 0$ נגדיר $H \subsetneq M = \ker(f)$. כיוון שf לינארי $M = \ker(f)$ תת מרחב של H, וכיוון שf רציף $M = f^{-1}(\{0\})$ סגור, וכיוון ש$M \neq H$ קיים $w \in H \backslash M$. נסתמך על משפט 3 לבחור $u \in M$ קרוב ביותר לw. לכן $(u-w) \perp M$. עוד נגדיר וקטור יחידה $M \perp \frac{u-w}{\|u-w\|} = z$.
$M \not\ni z \neq 0$ ולכן $f(z) \neq 0$.

כעת ניקח $x \in H$ כלשהו ונעיר שהוקטור $\underbrace{f(x)}_{\in K}\underbrace{z}_{\in H} - \underbrace{f(z)}_{\in K}\underbrace{x}_{\in H} \in M$, ואם כן

$$0 = (f(x)z - f(z)x, z) = (f(x)z, z) - (f(z)x, z) = f(x)\underbrace{(z,z)}_{=1} - \left(x, \overline{f(z)}z\right)$$

ז.א. אם $y = \overline{f(z)}z$ קיבלנו לכל $x \in H$

$$f(x) = (x,y) = f_y(x)$$

נותר רק להוכיח שy יחיד. אבל אם קיים $y_1 \in H$ כך ש$f(x) = (x, y_1)$ ויוצא ש$(x, y - y_1) =$ $f(x) - f(x) = 0$ לכל $x \in H$. עבור $x = y - y_1$ נקבל

$$0 = (x, y - y_1) = (y - y_1, y - y_1) = \|y - y_1\|^2 \Longrightarrow y = y_1$$

■

תזכורת

נחזור לתורת המידה. נניח ש(X,S) מרחב מדיד וμ מידה על (X,S). כבר ראינו שלכל $f \geq 0$ מדידה S, ההגדרה $\nu(E) = \int_E f \, \mathrm{d}\mu$(כאשר $E \in S$) מגדירה מידה חדשה ν על (X,S). נעיר שאם $E \in S$ מקיימת $\mu(E) = 0$ אז בהכרח $\nu(E) = \int_E f \, \mathrm{d}\mu = 0$.

הגדרה

יהיו μ וν שתי מידות על (X,S). אומרים שθ רציפה בהחלט ביחס לμ(מסומן $\nu \ll \mu$) אם לכל $E \in S$ כך ש$\mu(E) = 0$ גם $\theta(E) = 0$.

לעיל הוכחנו שאם $\nu(E) = \int_E f \, \mathrm{d}\mu$ אז $\nu \ll \mu$.

משפט רדון ניקודים(Radon-Nikodym)

יהי (X,S) מרחב מדיד, ויהיו μ וν שתי מידות על (X,S) שהן סופיות σ, ו$\nu \ll \mu$. אזי קיים $f \geq 0$ מדידה S כך שלכל $E \in S$ $\nu(E) = \int_E f \, \mathrm{d}\mu$.

הגדרה

יהיו μ וν שתי מידות על (X,S). נאמר שהן סינגולריות הדדית(Mutually Singular)(מסומן $\nu \perp \mu$) אם $X = E_1 \uplus E_2$, כל E_i מדידה ו$\mu(E_1) = \nu(E_2) = 0$.

(במילים: μ "חי" על E_2 וθ "חי" על E_1)

משפט הפירוק של לבג

יהיו μ וν שתי מידות על (X,S), שהן σ סופיות. אזי קיים פירוק $\nu = \nu_a + \nu_s$ כאשר $\mu \ll \nu_a$, $\mu \perp \nu_s$ וגם $\nu_s \perp \nu_a$.

המתמטיקאי המפורסם פון נוימן מצא הוכחה לשני המשפטים הנ"ל ביחד ע"פ משפט ההצגה של ריס.