

אלגברה לינארית הרחבת הסמכה (בן גוריון), סמטסטר ב' תש"פ, מועד א'

8.7.2020, ט"ז תמוז תש"פ

מרצה: אחיה בר-און.
מתרגל: ד"ר דניס גלוקו.
אורך המבחן: 3 שעות.
חומר עזר: מחשבון פשוט בלבד.
הנחיות:

- יש לענות על כל 4 השאלות .
- סך הנקודות במבחן הוא 120. ציון מעל 100 יעוגל ל 100.
- השאלות לא מסודרות בהכרח לפי רמת קושי- מומלץ להתחיל עם שאלות שאתם יודעים לפתור.
- נמקו תשובתכם. תשובה ללא נימוק, גם אם נכונה, לא תתקבל.

המלצה: הסתכלו על כל השאלות והתחילו עם השאלות שאתם יודעים לענות. חלקו את זמנכם בתבונה!

בהצלחה! 😊

1. (30 נק')

(א) (23 נק') נתונה מערכת משוואות לינאריות (מעל \mathbb{R})

$$\begin{cases} x + ky - kz = 1 \\ y + kz = -1 \\ kx + (k^2 - 4)y + 3z = 2k + 7 \end{cases}$$

התלויה בפרמטר k .

i. (15 נק') קבעו לאילו ערכי k למערכת יש פתרון יחיד, אין פתרון או אינסוף פתרונות. נמקו תשובתכם.

ii. (8 נק') עבור ערכי k עבורם למערכת יש אינסוף פתרונות - מצאו את כל הפתרונות למערכת.

(ב) (7 נק') יהא V מ"ו ויהיו W_1, W_2, W_3 ת"מ. הוכיחו/הפריכו: אם $W_1 + W_2 = W_1 + W_3$ אזי $W_2 = W_3$.

2. (25 נק') תהא

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

מטריצה הפיכה.

(א) (15 נק') מצאו את ההופכית שלה A^{-1} .

(ב) (10 נק') האם $A^{100} = A^{102}$? נמקו תשובתכם.

3. (25 נק')

(א) (18 נק') יהיו

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2k & 1 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & k \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & -k \end{pmatrix}, A_4 = \begin{pmatrix} 2 & k \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

מטריצות ב $\mathbb{R}^{2 \times 2}$ התלויות בפרמטר k . עבור אילו ערכי k מתקיים כי $\{A_1, A_2, A_3, A_4\}$ בסיס של $\mathbb{R}^{2 \times 2}$? נמקו תשובתכם.

(ב) (7 נק') יהא V מ"ו ויהיו $v_1, v_2, v_3 \in V$ בת"ל. הוכיחו/הפריכו: שלושת הוקטורים $v_1 + v_2, v_2 + v_3, v_1 + v_3$ גם כן בת"ל.

4. (40 נק')

(א) (30 נק') יהיו

$$W_1 = \text{Null} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -3 & 2 \end{pmatrix}, W_2 = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$$

תתי מרחבים של \mathbb{R}^4 (תזכורת: עבור מטריצה A , מסמנים ב $\text{Null} A$ את כל הפתרונות למערכת ההומוגנית $Ax = 0$).

i. (15 נק') הציגו את W_2 לפי משוואות ומצאו את המימד שלו.

ii. (15 נק') מצאו בסיס ל $W_1 \cap W_2$.

(ב) (בנוסף - 10 נק') יהא V מ"ו. הוכיחו כי כל שני $v_1, v_2 \in V$ שונים קובעים ישר יחיד. כלומר הוכיחו כי:

i. קיים ישר L כך ש $v_1, v_2 \in L$.

ii. אם L' ישר המקיים כי $v_1, v_2 \in L'$ אז $L = L'$.