הגדרה: פונקציה f נקראת חד-חד-ערכית אם מתקיים עבורה התנאי הבא:

$$\forall x_1 \in \mathbb{R} \forall x_2 \in \mathbb{R} : \Big(f(x_1) = f(x_2)\Big) \to (x_1 = x_2)$$

$$\forall x_1 \in \mathbb{R} \forall x_2 \in \mathbb{R}: \big(f(x_1) = f(x_2)\big) \to (x_1 = x_2)$$

נתחיל בשלילה:

f **<u>אינה</u>** חד-חד-ערכית אם:

$$\exists x_1 \in \mathbb{R} \exists x_2 \in \mathbb{R}: \big(f(x_1) = f(x_2)\big) \wedge (x_1 \neq x_2)$$

כיוון שהשלילה של גרירה היא

$$\neg(p \to q) \equiv p \wedge \neg q$$

הרי

$$\neg(p \to q) \equiv \neg(\neg p \vee q) \equiv p \wedge \neg q$$

כעת עבור כל אחד מהפונקציות הנתונות צריך לקבוע אם הן מקיימות את הפסוק של ההגדרה, או את שלילתו.

דוגמאות:

$$f(x) = x^2$$

נוכיח את השלילה, כלומר פונקציה זו <u>אינה</u> חד-חד-ערכית. (נוכיח את הפסוק בצבע אדום.)

נבחר $x_1 = 2$ וכן $x_2 = -2$ ואכן

$$f(x_1) = f(x_2)$$

שהרי

$$(2)^2 = (-2)^2$$

וכן

$$x_1 \neq x_2$$

דוגמא הבא: $g(x) = x + 1$

ננסה להוכיח כי פונקציה זו אכן חד-חד-ערכית, כלומר ננסה להוכיח את הפסוק בצבע ירוק.

כיוון שמדובר בפסוק לכל, נתחיל במילה 'יהי'.

יהיו $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$

צ"ל שאם $g(x_1) = g(x_2)$ אזי $x_1 = x_2$

כלומר נתון כי

$$g(x_1) = g(x_2)$$

$$x_1 + 1 = x_2 + 1$$

אכן נחסיר 1 משני הצדדים ונסיק כי

$$x_1 = x_2$$

לבסוף דוגמא אחרונה:

$$h(x) = \sin(x)$$

נוכיח כי הפונקציה אינה חד-חד-ערכית

נבחר $x_1 = 0, x_2 = 2\pi$ ואכן

$$h(x_1) = h(x_2)$$

שהרי

$$\sin(0) = \sin(2\pi) = 0$$

ואכן

$$x_1 \neq x_2$$

תזכורת: זו אינה הוכחה בשלילה, אלא הוכחת השלילה

כאשר מוכיחים בשלילה, מניחים את השלילה של מה שצריך להוכיח, מגיעים לסתירה, והמסקנה היא שהטענה נכונה.

אנחנו הוכחנו את השלילה, ולכן הטענה אינה נכונה.

7. הוכיחו/הפריכו: לכל שלוש קבוצות A, B, C מתקיים $A \cap C \subseteq B \Leftrightarrow A \setminus B \subseteq A \setminus C$

ראשית ננסה להציב קצת קבוצות ריקות על מנת לחוש את התרגיל, ולהתפלל להפרכה.

נציב למשל $A = \emptyset$

מצד שמאל נקבל את הטענה

$$\emptyset \cap C \subseteq B$$

שהיא כמובן אמת.

מצד ימין, נקבל

$$\emptyset - B \subseteq \emptyset - C$$

(הערה: נסמן כאן הפרש קבוצות ע"י $A - B$ במקום $A \setminus B$.)

וגם צד ימין יוצא אמת.

ננסה להציב $B = \emptyset$.

מצד שמאל נקבל את הטענה

$$A \cap C \subseteq \emptyset$$

ומצד ימין

$$A \subseteq A - C$$

במצב כזה שלא ברור לנו אם הטענה מתקיימת או לא, נדלג הלאה.

לבסוף נציב $C = \emptyset$ ונקבל מצד שמאל

$$\emptyset \subseteq B$$

שהוא אמת, ומצד ימין נקבל

$$A - B \subseteq A$$

שגם הוא אמת תמיד.

סה"כ בכל ההצבות או שהביטוי היה נכון, או שלא הצלחנו לקבוע. כלומר לא פתרנו את התרגיל.

ננסה להוכיח את הטענה.

תהיינה קבוצות A, B, C.

ראשית נשים לב שמדובר בטענת גרירה דו כיוונית (שימו לב, זה שונה מהכלה דו כיוונית).

צריך להוכיח גרירה בכל אחד מן הכיוונים.

בכיוון ראשון, נניח את צד שמאל ונוכיח את צד ימין.

נתון:

$$A \cap C \subseteq B$$

צ"ל:

$$A - B \subseteq A - C$$

כעת, עלינו להוכיח טענת הכלה.

יהי $x \in A - B$

צ"ל $x \in A - C$

נתון כי $x \in A$ וכן $x \notin B$

צ"ל כי $x \in A$ וכן $x \notin C$

זה ש$x \in A$ ממש נתון, נותר להוכיח כי $x \notin C$.

דרך 1:

נב"ש כי $x \in C$. כיוון ש $x \in A$ ביחד נובע כי $x \in A \cap C$

ואז מהנתון העליון נובע כי $x \in B$ בסתירה.

דרך 2:

כיוון ש$x \notin B$ יחד עם העובדה כי $A \cap C \subseteq B$

נובע כי $x \notin A \cap C$

אבל $x \notin A$ ולכן $x \notin C$.

בכיוון שני, נניח את הטענה מצד ימין, ונוכיח את הטענה מצד שמאל.

נתון:

$$A - B \subseteq A - C$$

צ"ל

$$A \cap C \subseteq B$$

שוב יש להוכיח טענת הכלה:

יהי $x \in A \cap C$

צ"ל $x \in B$

נתון $x \in A$ וכן $x \in C$

לכן $x \notin A - C$ ולכן מהנתון העליון נובע כי $x \notin A - B$

לבסוף, כיוון ש $x \in A$ אבל $x \notin A - B$ ולכן $x \in B$

5. פתרו את האינטגרל $\int \frac{e^x}{e^{2x}-1}dx$

תזכורת: יש לנו 3 דרכים לגשת לאינטגרלים-

1. הצבה
2. חלקים
3. רציונאלית

כיוון שלא מדובר בפולינום חלקי פולינום שיטה 3 אינה רלוונטית (כרגע).

נבצע הצבה:

הצבות הגיוניות

$$t = e^x$$

$$t = e^{2x}$$

$$t = e^{2x} - 1$$

ננסה (כנראה לא בצדק) להציב $t = e^{2x} - 1$

$$dt = 2e^{2x}dx$$

כיוון שזה לא מופיע באינטגרל, נבודד את x ונציב מחדש

$$e^{2x} = 1 + t$$

$$2x = \ln(1+t)$$

$$x = \frac{1}{2}\ln(1+t)$$

ולכן סה"כ אחרי ההצבה נקבל

$$\int \frac{e^x}{e^{2x}-1}dx = \{\dots\} = \int \frac{e^{\frac{1}{2}\ln(1+t)}}{t} \cdot \frac{1}{2}\ln(1+t)\,dt = \int \frac{e^{\ln\left(\sqrt{1+t}\right)}}{t} \cdot \frac{1}{2}\ln(1+t)\,dt = \int \frac{\sqrt{1+t}}{t} \cdot \frac{1}{2}\ln(1+t)\,dt$$

וזה לא נראה חביב.

כעת נציב $t = e^x$ ונראה איזה תענוג.

$$dt = e^x dx$$

אחרי הצבה נקבל:

$$\int \frac{e^x}{e^{2x}-1}dx = \begin{Bmatrix} t = e^x \\ dt = e^x dx \end{Bmatrix} = \int \frac{1}{t^2-1}dt$$

והגענו לפונקציה רציונאלית, זה סימן טוב מאד.

ראשית, נשים לב כי דרגת המונה נמוכה מדרגת המכנה ולכן אין צורך בחילוק פולינומים.

השלב הבא הוא לפרק את המכנה לגורמים אי פריקים על מנת לפרק את השבר לשברים חלקיים.

$$\frac{1}{t^2-1} = \frac{1}{(t-1)(t+1)} = \frac{A}{t-1} + \frac{B}{t+1}$$

נעשה מכנה משותף ונשווה מונים

$$1 = A(t+1) + B(t-1)$$

נציב $t = 1$

$$1 = 2A \rightarrow A = \frac{1}{2}$$

נציב $t = -1$

$$1 = -2B \rightarrow B = -\frac{1}{2}$$

כלומר

$$\frac{1}{t^2-1} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1}\right]$$

ולכן

$$\int \frac{1}{t^2-1}dt = \frac{1}{2}\int \frac{1}{t-1}dt - \frac{1}{2}\int \frac{1}{t+1}dt = \frac{1}{2}\ln|t-1| - \frac{1}{2}\ln|t+1|$$

סה"כ נחזור לאינטגרל המקורי ונקבל כי

$$\int \frac{e^x}{e^{2x}-1}dx = \cdots = \frac{1}{2}\ln|e^x-1| - \frac{1}{2}\ln|e^x+1| + C$$

5. פתרו את האינטגרל $\int x^3 e^{\left(x^2\right)} dx$

$$\int x^3 e^{x^2} dx = \begin{Bmatrix} t = x^2 \\ dt = 2xdx \\ \frac{1}{2}dt = xdx \end{Bmatrix} = \frac{1}{2}\int te^t dt = \begin{Bmatrix} f' = e^t & g = t \\ f = e^t & g' = 1 \end{Bmatrix} = \frac{1}{2}\left[te^t - \int e^t dt\right] =$$

$$= \frac{1}{2}(te^t - e^t) + C = \frac{1}{2}\left(x^2 e^{x^2} - e^{x^2}\right) + C$$

הרחבה לגבי המעבר של ההצבה:

$$\int x^3 e^{x^2} dx = \int x^2 e^{x^2} \cdot xdx$$

6. <u>הגדרה:</u> שני וקטורים במרחב $v,u\in\mathbb{R}^3$ נקראים <u>בת"ל</u> אם

$$\forall a\in\mathbb{R}\forall b\in\mathbb{R}:\left(av+bu=(0,0,0)\right)\rightarrow\left(a=0\wedge b=0\right)$$

א. נסחו תנאי השקול לכך ששני הוקטורים $v,u\in\mathbb{R}^3$ אינם בת"ל.

ב. קבעו **והוכיחו** לגבי כל אחד מהזוגות הבאים אם הם בת"ל או לא:

$(1,2,3),(0,1,2)$, $(1,1,-1),(-1,-1,1)$, $(1,0,2),(0,0,0)$

נזכור שוב את השלילה של גרירה

$$\neg(p\rightarrow q)\equiv p\wedge\neg q$$

ולכן השלילה של ההגדרה היא

$$\exists a\in\mathbb{R}\exists b\in\mathbb{R}:\left(av+bu=(0,0,0)\right)\wedge\left((a\neq 0)\vee(b\neq 0)\right)$$

ואילו ההגדרה המקורית היא:

$$\forall a\in\mathbb{R}\forall b\in\mathbb{R}:\left(av+bu=(0,0,0)\right)\rightarrow(a=0\wedge b=0)$$

כעת נקבע לגבי כל זוג וקטורים אם הוא בת"ל (כלומר מקיים את הפסוק הצבוע בירוק) או שאינו בת"ל (מקיים את הפסוק באדום).

$$v=(1,2,3)$$

$$u=(0,1,2)$$

ננסה להוכיח:

יהיו $a,b\in\mathbb{R}$ כך ש

$$av+bu=(0,0,0)$$

צ"ל $a=b=0$

כלומר נתון כי

$$a(1,2,3)+b(0,1,2)=(0,0,0)$$

ולכן

$$a=0$$

$$2a+b=0$$

$$3a+2b=0$$

נציב את $a=0$ מהמשוואה הראשונה במשוואה השנייה ונקבל כי $b=0$ כפי שהיה צריך להוכיח.

נעבור לזוג הבא

$$v = (1,1,-1)$$

$$u = (-1,-1,1)$$

נוכיח כי הוקטורים אינם בת"ל, כלומר נוכיח את הפסוק האדום.

נבחר

$$a = b = 1$$

ואכן

$$av + bu = 1 \cdot v + 1 \cdot u = (0,0,0)$$

וכמו כן $a \neq 0$ או $b \neq 0$.

נעבור לזוג האחרון

$$v = (1,0,2)$$

$$u = (0,0,0)$$

וננסה (לא בצדק) להוכיח כי הם בת"ל, כלומר ננסה להוכיח את הפסוק הירוק.

שימו לב: זו אינה שיטת הוכחה, אלא ניסוי וטעייה.

יהיו $a, b \in \mathbb{R}$ כך ש

$$av + bu = (0,0,0)$$

צ"ל כי $a = b = 0$

נתון

$$a(1,0,2) + b(0,0,0) = (0,0,0)$$

לכן

$$\begin{aligned} a &= 0 \\ 0 &= 0 \\ 2a &= 0 \end{aligned}$$

לכן $a = 0$

אבל מה לגבי b?

נעבור להפריך, כלומר להוכיח כי הוקטורים אינם בת"ל, כלומר להוכיח את הפסוק האדום.

נבחר

$$\begin{aligned} a &= 0 \\ b &= 1 \end{aligned}$$

ואכן

$$a \cdot v + b \cdot u = 0 \cdot v + 1 \cdot u = (0,0,0)$$

אך $a \neq 0$ או $b \neq 0$ (כיוון ש $b = 1$).

שאלה 2: מצאו את כל הפתרונות המרוכבים למשוואה $(1+i)z^4 = 1+i$

שימו לב שהמשוואה היא מהצורה קבוע כפול חזקה של z שווה קבוע.

אנחנו יודעים איך לפתור משוואות מהצורה חזקה של z שווה לקבוע, כלומר נותר רק לחלק במקדם.

באופן כללי במקום לחלק במרוכב, נכפול בצמוד. הפעם במיוחד, אפשר פשוט לצמצם!

$$(1+i)z^4 = (1+i)$$

$$z^4 = 1$$

שימו לב, אם היינו כופלים בצמוד היינו מגיעים לאותו הדבר:

הצמוד של המקדם $1+i$ הוא $1-i$ נכפול בו

$$2z^4 = 2$$

ונחלק ב2 ושוב נגיע לאותה המשבצת.

על מנת לפתור את התרגיל נעביר את הקבוע לצורתו הקוטבית (גאומטרית) ונקבל כי המשוואה היא

$$z^4 = 1 \cdot cis\ (0)$$

ולכן הפתרונות הם

$$z_k = \sqrt[4]{1} cis\left(\frac{0+2\pi k}{4}\right)$$
$$k = 0,1,2,3$$

אפשר להשאיר זאת כך, אבל במקרה זה קל לראות כי הפתרונות הם

$$z_0 = 1, z_1 = i, z_2 = -1, z_3 = -i$$

שאלה 3:

א. מצאו את ההיטל של הוקטור $(3,1,-1)$ על הישר בכיוון הוקטור $(1,0,1)$.

ב. מצאו את ההיטל של הוקטור $(3a,a^2,a)$ על הישר בכיוון הוקטור $(1,0,1)$, הביעו תשובתכם באמצעות הפרמטר a.

(זכרו: ההפרש בין הוקטור להיטל - מאונך לישר.)

בכיתה מצאנו נוסחא כללית למציאת ההיטל. נניח לרגע ששכחנו אותה.

נסמן $v = (3,1,-1)$ ואילו ההיטל הוא

$$u = (t,0,t)$$

דרוש כי

$$(3,1,-1) - (t,0,t) \perp (1,0,1)$$

צריך כי

$$(3-t,1,-1-t)\cdot(1,0,1)=0$$

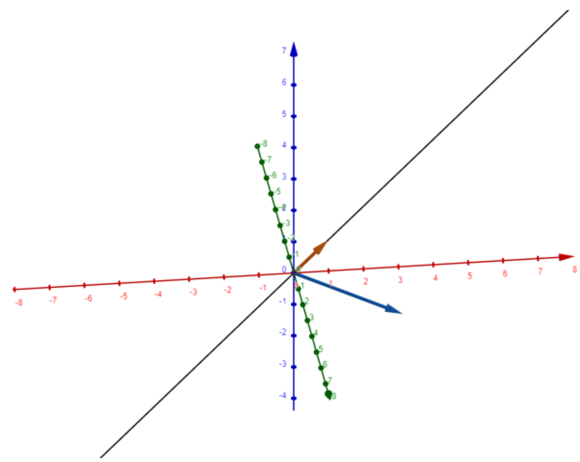
$$3-t-1-t=0$$

$$2t=2$$

$$t=1$$

ולכן ההיטל הוא

$$(1,0,1)$$



את ב' סעיף נפתור באופן דומה.

ההיטל הוא $(t,0,t)$ וצריך כי

$$(3a,a^2,a)-(t,0,t)\perp(1,0,1)$$

כלומר צריך כי

$$(3a-t,a^2,a-t)\cdot(1,0,1)=0$$

$$3a-t+a-t=0$$

$$2t=4a$$

$$t=2a$$

ולכן ההיטל הוא סה"כ

$$(2a,0,2a)$$

כעת ניזכר בנוסחא מהכיתה

ההיטל של v על הישר הנפרש מהוקטור u הוא

$$\frac{v\cdot u}{u\cdot u}\cdot u=\frac{(3a,a^2,a)\cdot(1,0,1)}{(1,0,1)\cdot(1,0,1)}\cdot(1,0,1)=\frac{3a+a}{2}\cdot(1,0,1)=2a(1,0,1)$$

לא במפתיע, זו אותה התשובה בדיוק.

<u>שאלה 5:</u> יהי $0 \neq a \in \mathbb{R}$, פתרו את האינטגרל

$$\int x \cdot \sin(ax)\, dx$$

פתרון: נבצע אינטגרציה בחלקים

$$\int x \sin(ax)\, dx = \begin{Bmatrix} f' = \sin(ax) & g = x \\ f = -\dfrac{\cos(ax)}{a} & g' = 1 \end{Bmatrix} = -\frac{x}{a}\cos(ax) + \frac{1}{a}\int \cos(ax)\, dx =$$

$$= -\frac{1}{a} x \cos(ax) + \frac{1}{a^2}\sin(ax) + C$$

<u>שאלה 4:</u>

א. הוכיחו את הטענה הבאה באינדוקציה: לכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים כי

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \geq \sqrt{n}$$

ב. מצאו n עבורו

$$\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} \geq 10$$

נתחיל מסעיף ב', בין היתר כי יש כאן לקח שעליכם ללמוד!

לא מעט פעמים, סעיפים מסתמכים זה על זה, אבל בניגוד לבגרות בקטע טוב.

בבגרות (ולפעמים גם באוניברסיטה) בלי לפתור סעיף אחד, לא מוצאים את מה שצריך בשביל להתחיל בכלל את הסעיף השני (למשל פרמטר כלשהו). באוניברסיטה יש פעמים רבות שאלות הוכחה (כמו כאן). במקרה כזה אפשר בוודאי להסתמך על הסעיף אפילו אם לא הצלחנו להוכיח נכון.

נשים לב כי הצד השמאלי של שני הסעיפים זהה!

ולכן מסעיף א' אנו יודעים כי

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} = \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} \geq \sqrt{n}$$

רוצים שמצד ימין נקבל 10, כלומר $\sqrt{n} = 10$ ולכן נבחר $n = 100$ וסיימנו את סעיף ב'.

כעת נוכיח את סעיף א'.

בדיקה:

עבור $n = 1$ נקבל כי אכן

$$\sum_{k=1}^{1} \frac{1}{\sqrt{k}} = \frac{1}{\sqrt{1}} \geq \sqrt{1}$$

כעת יהי n עבורו הטענה נכונה, כלומר

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \geq \sqrt{n}$$

צ"ל את הטענה הבאה, כלומר צ"ל כי

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{\sqrt{k}} \geq \sqrt{n+1}$$

נתחיל מצד שמאל ונפתח אותו

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{\sqrt{k}} = \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}\right) + \frac{1}{\sqrt{n+1}} \underbrace{\geq}_{\text{הנחת האינדוקציה}} \sqrt{n} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} \underbrace{\geq}_{\text{צ"ל}} \sqrt{n+1}$$

מספיק להוכיח כי

$$\sqrt{n} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} \geq \sqrt{n+1}$$

כעת נפתח את אי השיוויון שצ"ל, נכפול בגורם החיובי $\sqrt{n+1}$

נקבל שצריך להוכיח כי

$$\sqrt{n(n+1)} + 1 \geq n+1$$

כלומר צ"ל כי

$$\sqrt{n(n+1)} \geq n$$

כיוון ששני הצדדים חיוביים מותר להעלות בריבוע ולקבל אי שיוויון שקול שצריך להוכיח

$$n(n+1) \geq n^2$$

$$n^2 + n \geq n^2$$

$$n \geq 0$$

ואכן אי השיוויון הזה הוא אמת.

4. הוכיחו באינדוקציה כי לכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

צ"ל בעצם כי

$$1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

בדיקה עבור $n = 1$ אכן מתקיים כי

$$1^2 = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{6}$$

יהי n עבורו הטענה נכונה, צ"ל עבור $n + 1$ כלומר נתון כי

$$1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

צ"ל כי

$$1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 + (n+1)^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2(n+1)+1)}{6}$$

נפתח את צד שמאל באמצעות הנחת האינדוקציה, וסתם על מנת לשגע אתכם נעבור לכתיב סימן הסכימה.

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^2 = \left(\sum_{k=1}^{n} k^2\right) + (n+1)^2 \underbrace{=}_{\text{הנחת האינדוקציה}} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2$$

צריך להוכיח כי

$$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2(n+1)+1)}{6}$$

נצמצם את השיוויון הרצוי הזה ב$n + 1$

ונקבל שצריך להוכיח כי

$$\frac{n(2n+1)}{6} + (n+1) = \frac{(n+2)(2n+3)}{6}$$

נכפול ב6 ונקבל שיוויון שקול

$$n(2n+1) + 6(n+1) = (n+2)(2n+3)$$

נזכור – אנחנו צריכים להוכיח את זה!

כלומר צ"ל כי

$$2n^2 + n + 6n + 6 = 2n^2 + 4n + 3n + 6$$

אכן מתקיים!