בס"ד

תירגול 9 (למורים)

מתמטיקה בדידה - ~~13 שנה א~~ (הנושא: קומבינטוריקה)

משפט 1: אם A,B קבוצות סופיות וזרות, אז: $|A\cup B|=|A|+|B|$. (עקרון הסכום)

דוגמא: בספריה יש 50 ספרים בנושא מחשבים בשפה העברית, ו-70 ספרים בנושא מחשבים בשפה האנגלית. מכיוון שאלו קבוצות סופיות וזרות זו לזו, סה"כ מס' הספרים בנושא מחשבים הוא $50+70=120$.

משפט 2: אם A,B קבוצות סופיות, אז: $|A\times B|=|A|\cdot|B|$. (עקרון המכפלה)

תרגיל 1: ~~[illegible]~~ בחנות תכשיטים גדולה יש 4 דלתות ו-8 חלונות. פורץ החליט שעליו להיכנס לחנות דרך חלון ולצאת דרך אחת הדלתות. בכמה דרכים שונות הוא יכול לעשות זאת? ($|A|=8$)

תשובה: נסמן ב-A את קב' החלונות השונים וב-B את קב' הדלתות השונות. ($|B|=4$) ניתן לסמן את מסלול הפורץ ע"י זוג סדור (a,b), כאשר $a\in A$, $b\in B$. כלומר, זוג סדור זה מייצג את החלון שדרכו נכנס הפורץ והדלת שדרכה יצא. לכן מס' המסלולים השונים העומדים בפני הפורץ הוא כמס' הזוגות הסדורים השונים, כלומר: $|A\times B|=4\cdot 8=32$.

תרגיל 2: בשכונה מסמנים ~~[illegible]~~ בית ע"י 2 אותיות (עבריות). בכמה דרכים שונות אפשר לסמן בית אם:

א. אסור שאות תחזור על עצמה באותו סימון.

ב. מותר לחזור על אות באותו סימון.

תשובה: מס' האותיות בא"ב העברי הוא 22. לכן:

א. מס' האפשרויות לאות הראשונה הוא 22 ומס' האפשרויות לאות השנייה הוא 21 } סה"כ - $22\cdot 21=462$

ב. מס' האפשרויות לאות הראשונה הוא 22 וגם מס' " " בשנייה הוא 22 } סה"כ - $22\cdot 22=484$

תרגיל 3: א. כמה מספרים אי-זוגיים יש בין 0 ל-99?

ב. כמה " " " עם ספרות שונות?

פתרון: אנו נייצג מספר כזוג סדור: (ספרת אחדות, ספרת עשרות). כך למשל, המס' 0 יסומן ע"י הזוג $(0,0)$, המס' 9 ע"י $(9,0)$ ו-13 ע"י $(3,1)$.

תהי A קב' ספרות האחדות ו-B קב' ספרות העשרות. לכן,

כי המס אי-זוגי

דוג'

$A=\{1,3,5,7,9\}$ ואלו $B=\{0,1,2,3,\dots,9\}$, $(B\subseteq A)$

$$|A|=5 \qquad |B|=10$$

א. מס' האפשרויות לספ' האחדות - 5, ולספ' העשרות - 10. סה"כ: $5\cdot10=50$

ב. מס' האפשרויות לספרת האחדות - 5, ולספרת העשרות - 9 (כי כבר בחרנו אחד ממנה). $5\cdot9=45$

קודם בוחרים מ-A ואז מ-B, למה לא הפוך? כלומר, למה לא לעשות לספ' ~~העשרות~~ - ~~10~~, ולספרת ~~העשרות~~ האחדות - 4? כי אז אם ~~נבחר~~ ספרת עשרות זוגית, למשל 2, נקבל רק 4 אפשרויות לספרת אחדות במקום 5.

מש"ל.

משפט 3: תהיינה $A_1,A_2,\dots,A_n$ קבוצות סופיות זרות זו לזו. אזי:

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right|=\sum_{i=1}^{n}|A_i|$$

(כלומר: $|A_1\cup A_2\cup\dots\cup A_n|=|A_1|+|A_2|+\dots+|A_n|$)

משפט 4: תהיינה $A_1,A_2,\dots,A_n$ קבוצות סופיות, אזי:

$$|A_1\times A_2\times\dots\times A_n|=|A_1|\cdot|A_2|\cdot\ldots\cdot|A_n|$$

תרגיל 4: סיסמת משתמש למחשב מסוים בנויה מחמישה תווים, הכוללים 2 אותיות לועזיות ואח"כ 3 ספרות. כמה סיסמאות שונות יש?

פתרון: נסמן ב- A_i את קב' התווים שאפשר להציב במקום ה-i בסיסמה, עבור $i=1,2,3,4,5$. לכן:

$$|A_1\times A_2\times A_3\times A_4\times A_5|=|A_1|\cdot|A_2|\cdot|A_3|\cdot|A_4|\cdot|A_5|=$$
$$=26\cdot26\cdot10\cdot10\cdot10$$

(ניתן לזהות כל סיסמא עם חמישיה סדורה (a_1,a_2,a_3,a_4,a_5), ומכאן מס' הסיסמאות האפשריות הוא כמס' החמישיות הסדורות השונות).

מש"ל.

בס"ד

$(k \le n)$

נרצה לברר את מס' הדרכים לבחור k איברים מתוך הקבוצה $\{1,2,\dots,n\}$.
תחילה יש צורך לקבוע האם מותר או אסור לבחור אותו איבר מס' פעמים
ואם סדר הבחירה של האיברים חשוב או לא.

תהי A קבוצה. $|A|=n$ ויהי $k\in\mathbb{N}$.

	אסורות חזרות	מותרות חזרות
יש חשיבות לסדר	מס' הסדרות באורך k ללא חזרות שניתן לבנות מ-n איברים הוא $P(n,k)=\frac{n!}{(n-k)!}$ (חליפות)	מס' הסדרות באורך k עם חזרות שניתן לבנות מ-n איברים הוא - n^k
אין חשיבות לסדר	$C(n,k)=\frac{n!}{k!(n-k)!}=\binom{n}{k}$ (צירופים)	$D(n,k)=\binom{n+k-1}{k}=\binom{n+k-1}{n-1}=\frac{(n+k-1)!}{(n-1)!\,k!}$

(בחירה עם חזרות כשהסדר חשוב)

<u>תרגיל 5:</u> בטופס טוטו יש 15 משחקים. כל משחק יכול להסתיים ב-3 תוצאות אפשריות: ניצחון של הקבוצה המארחת, הפסד או תיקו. מסמנים זאת ב: $\{1,2,x\}$. כמה דרכים שונות יש למלא טור בטופס טוטו?

<u>תשובה:</u> נקבל סדרה באורך 15 כשחזרות מותרות הבנויה מ-3 איברים $\{1,2,x\}$ לכן: מס' הסדרות השונות הנ"ל - 3^{15}.

(בחירה ללא חזרות כשהסדר חשוב)

<u>משפט:</u> מס' התמורות של הקבוצה $\{1,2,\dots,n\}$ הוא $n!$.
(מס' האופנים לסדר בשורה את האיברים $\{1,2,\dots,n\}$ כשחזרות אסורות)

<u>תרגיל 6:</u> 11 שחקני קבוצת כדורגל רוצים להסתדר לצילום קבוצתי לרגל ניצחונם הראשון אי-פעם. בכמה אופנים הם יכולים להסתדר בשורה בפני הצלם?

<u>תשובה:</u> $11! = 11\cdot10\cdot9\cdot8\cdot\ldots\cdot1$ (תמורה של 11).

<u>תרגיל 7:</u> כמה מילים בנות 4 אותיות ניתן לבנות מאותיות הא"ב האנגלי, כשאסור שבמילה אחת תופיע אותה אות יותר מפעם אחת?

<u>תשובה:</u> $\frac{26!}{22!}=26\cdot25\cdot24\cdot23=358{,}800$.
(יש חשיבות לסדר, כי המילה abcd שונה מהמילה ~~[illegible]~~ adcb למשל.)

בחירה ללא חזרות והסדר לא חשוב

תרגיל 8: בטופס לוטו יש לבחור 6 מס' שונים מתוך המספרים $\{1,2,3,\dots,36\}$. בכמה דרכים אפשר למלא טופס לוטו?

פתרון: אסור חזרות (כי אי אפשר לבחור פעמיים אותו מס') והסדר אינו חשוב. לכן:

$$\binom{36}{6} = \frac{36!}{6!\,30!}$$

סדר בחירת האיברים אינו חשוב

תרגיל 9: בכיתה יש 4 בנות ו-9 בנים. בכמה דרכים אפשר לבחור ועד מתוך ילדי הכיתה שיכלול 2 בנות ו-3 בנים?

פתרון: מס' הדרכים לבחור 2 בנות הוא $\binom{4}{2}$ וזאת מכיוון שסדר הבנות שנבחרו אינו חשוב וצריך לבחור 2 בנות שונות זו מזו (אסור חזרות). באותו אופן מס' הדרכים לבחור 3 בנים הוא $\binom{9}{3}$. לכן לפי עקרון המכפלה, מס' הדרכים לבחור ועד הוא -

$$\binom{4}{2}\cdot\binom{9}{3} = 6\cdot 84 = 504$$

תרגיל 10: 11 שחקני קבוצת כדורגל רוצים להסתדר לצילום קבוצתי לרגל ניצחונם הראשון אי פעם. הפעם רוצים 11 השחקנים להצטלם בשתי שורות, כאשר 6 שחקנים עומדים מאחור ו-5 שחקנים מלפנים, ובנוסף השוער צריך לעמוד במרכזה של השורה הקדמית. בכמה אופנים הם יכולים להסתדר?

פתרון: עלינו לבחור 6 שחקנים מתוך 10 שיעמדו בשורה האחורית (כי זה לא כולל את השוער) אסור חזרות ואין חשיבות לסדר לכן אפשר לעשות זאת ב- $\binom{10}{6}$ דרכים.

לאחר שבחרנו אותם אנו צריכים לסדר אותם בשורה, זוהי תמורה של 6 איברים, לכן יש $6!$ דרכים לעשות זאת.

את ארבעת השחקנים הנותרים (פרט לשוער) אנו מסדרים בשורה הקדמית, זוהי תמורה של 4 איברים, לכן יש $4!$ דרכים לעשות זאת.

לבסוף כמובן נצרף את השוער ונעמיד אותו במרכז השורה.

כעת, לפי עקרון המכפלה, מס' הדרכים הכולל לסדר את השחקנים כנדרש הוא -

$$\binom{10}{6}\cdot 6!\cdot 4! = 10!$$

תרגיל 11: כמה פתרונות שלמים אי-שליליים יש למשוואה $x_1+x_2+\dots+x_n = k$?

בחירה עם חזרות כשהסדר לא חשוב

פתרון: אנו צריכים לחלק k עצמים זהים ל-n תאים.

בס"ד

אין חשיבות לסדר שבו אנו מחלקים את העצמים ומותרות חזרות (מותר לחזור ולשים עצם נוסף בקופסא מה שכבר שמנו בו). לכן מס הפתרונות של המשוואה הוא -

$$\binom{n+k-1}{n-1}$$

תרגיל בו: כמה פתרונות שלמים אי-שליליים יש לאי השוויון: $x_1+x_2+\dots+x_n\le k$?

פתרון: נגדיר משתנה חדש y ונהפוך את אי השוויון לשוויון: $x_1+x_2+\dots+x_n+y=k$.

קיבלנו משוואה ב-$(n+1)$ משתנים. מכל פתרון של המשוואה ניתן מיד לקבל פתרון של האי-שוויון. ולהיפך, בהינתן פתרון כלשהו של האי-שוויון נגדיר $y=k-(x_1+\dots+x_n)$ ונקבל פתרון למשוואה.
ולכן מס הפתרונות של האי-שוויון הוא -

$$\binom{n+1+k-1}{n+1-1}=\binom{n+k}{n}$$

תרגיל בז: במכללה כלשהי לומדים לתואר במדעי המחשב במשך 4 שנים.

א. בכמה דרכים אפשר לבחור ועד של 10 תלמידים לייצוג תלמידי מדעי המחשב, כאשר מה שחשוב הוא כמה נציגים נבחרו מכל מחזור ולא אילו תלמידים נבחרו?

ב. בכמה דרכים אפשר לבחור את הועד כך שייבחר לפחות תלמיד אחד משנה א', לפחות תלמיד אחד משנה ב', לפחות 2 תלמידים משנה ג' ולפחות שני תלמידים משנה ד'?

פתרון:

נסמן ב-x_1,x_2,x_3,x_4 את מס התלמידים שנבחרו מכל מחזור. לכן

א. במקרה זה עלינו למצוא את מס הפתרונות השלמים האי-שליליים למשוואה $x_1+x_2+x_3+x_4=10$. ולכן זהו $n=4,k=10 \Rightarrow \binom{10+4-1}{4-1}=\binom{13}{3}=286$

ב. במקרה זה צריך להתקיים $x_1+x_2+x_3+x_4=10$ כאשר $x_1\ge 1$, $x_2\ge 1$, $x_3\ge 2$, $x_4\ge 2$. נגדיר משתנים חדשים: $y_1=x_1-1$, $y_2=x_2-1$, $y_3=x_3-2$, $y_4=x_4-2$. (מתקיים ש $y_i\ge 0$) מס הדרכים לבחור את הועד הוא כמס הפתרונות השלמים האי-שליליים למשוואה $y_1+y_2+y_3+y_4=4$. מס זה הוא - $\binom{7}{3}=35$. $=\binom{4+4-1}{4-1}$ $\begin{cases} n=4 \\ k=4 \end{cases}$

$(y_1+y_2+y_3+y_4=x_1-1+x_2-1+x_3-2+x_4-2=10-1-1-2-2=4)$

מתמטיקה בדידה 2 - שיעור 7

הנושא: קומבינטוריקה - המשך ובינום של ניוטון

טבלה מסכמת -
מספר הדרכים לבחירת k איברים מתוך n איברים:

	ללא חזרות	עם חזרות
עם חשיבות לסדר	$\frac{n!}{(n-k)!}$ (משפט 2)	n^k (משפט 1)
ללא חשיבות לסדר	$\binom{n}{k}$ (משפט 3)	$\binom{n-1+k}{n-1}$ (משפט 5)

טבלה מסכמת -
מספר הדרכים לחלוקת k כדורים ל- n תאים שונים:

	בכל תא (לא ריק) כדור אחד	ללא הגבלה על מספר הכדורים בתא
הכדורים שונים	$\frac{n!}{(n-k)!}$ (משפט 2)	n^k (משפט 1)
הכדורים זהים	$\binom{n}{k}$ (משפט 3)	$\binom{n-1+k}{n-1}$ (משפט 5)

בס״ד

הנושא: עקרון ההכלה וההדחה

אם A_1, A_2 הן שתי קבוצות סופיות אז:

$$|A_1\cup A_2| = |A_1|+|A_2|-|A_1\cap A_2|$$

עבור שלוש קבוצות A_1, A_2, A_3 מקבלים:

$$|A_1\cup A_2\cup A_3| = |A_1|+|A_2|+|A_3|-|A_1\cap A_2|-|A_1\cap A_3|-|A_2\cap A_3| + |A_1\cap A_2\cap A_3|$$

ועבור $A_1, \dots, A_n$ קב׳ סופיות מקבלים ש:

$$|A_1\cup A_2\cup \dots \cup A_n| = \sum_{i=1}^{n}|A_i| - \sum_{1\le i<j\le n}|A_i\cap A_j| + \sum_{1\le i<j<k\le n}|A_i\cap A_j\cap A_k|$$

$$-\sum_{1\le i<j<k<l\le n}|A_i\cap A_j\cap A_k\cap A_l| + \dots + (-1)^{n-1}\cdot |A_1\cap A_2\cap\dots\cap A_n|$$

(עד n)

תרגיל 5: במועדון מסוים, על כל חבר לשחק בריג׳ או גולף. ידוע כי 30 מחברי המועדון הם שחקני בריג׳, ו-42 הם שחקני גולף. 20 מחברי המועדון משחקים בשני המשחקים. מהו מספר חברי המועדון?

תשובה:

נסמן ב- A_1 את קבוצת שחקני הבריג׳ (חלק מהם משחק גם גולף), וב- A_2 את קבוצת שחקני הגולף (חלק מהם משחק גם בריג׳). לפי הנתון, $|A_1|=30$, $|A_2|=42$. נתון לנו ידוע ש- $|A_1\cap A_2|=20$. אנו מחפשים את $|A_1\cup A_2|$, לכן:

$$|A_1\cup A_2| = |A_1|+|A_2|-|A_1\cap A_2| = 30+42-20=52$$

לפי דה מורגן מקבלים-

$$|A_1^c\cap A_2^c| = |(A_1\cup A_2)^c| = |U|-|A_1\cup A_2| =$$

$$= |U|-|A_1|-|A_2|+|A_1\cap A_2|.$$

עבור 3 קבוצות נקבל באותו אופן:

$$|A_1^c\cap A_2^c\cap A_3^c| = |U|-|A_1|-|A_2|-|A_3|+|A_1\cap A_2|+|A_1\cap A_3| + |A_2\cap A_3|-|A_1\cap A_2\cap A_3|$$

ועבור $A_1,\dots,A_n$ קב׳ סופיות מקבלים ש: ←

(4)

$$|A_1^c \cap A_2^c \cap \dots \cap A_n^c| = |U| - \sum_{i=1}^{n} |A_i| + \sum_{1\le i<j\le n} |A_i \cap A_j| + \dots + (-1)^n \cdot |A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n|$$

בס"ד

<u>תרגיל 6:</u> בקבוצה של 100 תלמידים 30 מנגנים, 25 מציירים, ו- 8 גם מנגנים וגם מציירים. מהו מס' התלמידים בקבוצה זו שאינם מנגנים ואינם מציירים?

<u>תשובה:</u>

אם נסמן: A_1 - קב' התלמידים המנגנים ⟸ 30

A_2 - קב' התלמידים המציירים ⟸ 25

אזי: A_1^c - היא קב' " שאינם מנגנים

A_2^c - היא קב' " שאינם מציירים.

$A_1^c \cap A_2^c$ היא קבוצת התלמידים שגם אינם מנגנים וגם אינם מציירים.

נחשב כעת:

$$|A_1^c \cap A_2^c| = |U| - |A_1| - |A_2| + |A_1 \cap A_2| =$$

$$= 100 - 30 - 25 + 8 = 53.$$

<u>תרגיל 7:</u> כמה מספרים בין 1 ל- 3,000 אינם מתחלקים לא ב- 3 ולא ב- 5?

<u>תשובה:</u> נסמן ב- A את קב' המספרים בין 1 ל- 3,000 המתחלקים ב- 3

וב- B את " " " " ב- 5.

$|A| = 1{,}000$ כי זה $\frac{3{,}000}{3}$, $|B| = 600$ $\frac{3{,}000}{5}$, $|A\cap B| = 200$ $\frac{3{,}000}{15}$

(המס' המתחלקים ב- $3\cdot 5 = 15$).

מס' המספרים שלא מתחלקים, לא ב- 3 ולא ב- 5, הוא:

$$|A^c \cap B^c| = 3{,}000 - 1{,}000 - 600 + 200 = 1{,}600.$$

<u>תרגיל 8:</u> מטילים n קוביות שונות.

<u>א.</u> מהו מס' התוצאות (האפשריות) של ההטלה?

<u>ב.</u> מהו מס' " האפשריות, בהן מופיע כל אחד מהמספרים 1 עד 6 <u>לפחות</u> פעם אחת?

כגון: אם מטילים 7 קוביות:

1 1 2 3 4 5 6

1 2 3 4 5 6 1

ואז:

1 1 1 3 4 5 6

חסר המס' 2.

<u>תשובה:</u>

<u>א.</u> 6^n. (לכל קוביה יש 6 אפשרויות, לכן: $\underbrace{6\cdot 6\cdot \dots \cdot 6}_{n \text{ פעמים}} = 6^n$).

<u>ב.</u> נסמן ב- A_1 עד A_6 את קב' התוצאות של ההטלות שבהן המספרים

בס"ד

1 עד 6, בהתאמה, **אינם** מופיעים.

עבור כל i מ-1 עד 6 מתקיים $|A_i|=5^n$ (5 תוצאות אפשריות בכל הטלה).

(כיוון, ש-A_1 - זה קב' התוצאות של ההטלות שבהן המס' 1 לא מופיע כלומר, בכל n ההטלות ~~יכולות~~ להופיע כל שאר חמשת המספרים, $5^n=\underbrace{5\cdot5\cdot\ldots\cdot5}_{n\text{ פעמים (הטלות)}}$.)

עבור כל זוג $1\le i<j\le 6$ מתקיים $|A_i\cap A_j|=4^n$.

עבור כל שלישיה $1\le i<j<k\le 6$ מתקיים $|A_i\cap A_j\cap A_k|=3^n$.

באופן דומה, מס' האיברים בחיתוך של כל ארבעה קב' שונות הוא 2^n.
בחיתוך של 5 קב' שונות יש רק איבר אחד (כל תוצאות ההטלות שוות זו לזו, ושוות למס' השישי שנשאר).

מס' האיברים בחיתוך כל הקבוצות הוא 0.

לכן, המס' המבוקש של האפשרויות הוא:

$$|A_1^c\cap A_2^c\cap A_3^c\cap A_4^c\cap A_5^c\cap A_6^c|=\underbrace{6^n}_{|\Omega|}-\underbrace{6\cdot5^n}_{|A_i|}+\underbrace{\binom{6}{2}\cdot4^n}_{\text{זוגות}}-\underbrace{\binom{6}{3}\cdot3^n}_{\text{שלישיות}}+$$

$$+\underbrace{\binom{6}{4}\cdot2^n}_{\text{רביעיות}}-\underbrace{\binom{6}{5}\cdot1}_{\text{חמישיות}}+\binom{6}{6}\cdot0=$$

$$=6^n-6\cdot5^n+15\cdot4^n-20\cdot3^n+15\cdot2^n-6.$$

תוספת לשיעור 13 (קומבינטוריקה)

משפט (עקרון ההכלה וההדחה)

תהיינה $A_1, A_2, \dots, A_n$ קבוצות סופיות. אזי:

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{i=1}^{n}|A_i| - \sum_{1\le i<j\le n}|A_i \cap A_j| + \sum_{1\le i<j<k\le n}|A_i \cap A_j \cap A_k| - \dots +$$
$$(-1)^{n-1}|A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n|$$

תרגיל

כל תלמיד שנה א' לומד לפחות אחד משלושת הקורסים הבאים - מחשבים, אנגלית, מתמטיקה. רישום התלמידים לקורסים נעשה על פי הטבלה הבאה:

שמות הקורסים	מספר התלמידים הרשומים
מחשבים	25
אנגלית	20
מתמטיקה	33
מחשבים ואנגלית	15
מחשבים ומתמטיקה	25
אנגלית ומתמטיקה	20
מחשבים, אנגלית ומתמטיקה	15

כמה תלמידים יש בסה"כ בשנה א'.

פתרון

נסמן A_1 - סטודנטים למחשבים, A_2 - סטודנטים לאנגלית, A_3 - סטודנטים למתמטיקה.

$|A_1| = 25$, $|A_2| = 20$, $|A_3| = 33$, $|A_1 \cap A_2| = 15$

$|A_1 \cap A_3| = 25$, $|A_2 \cap A_3| = 20$, $|A_1 \cap A_2 \cap A_3| = 15$

על פי משפט עקרון ההכלה וההדחה:

$$|A_1 \cup A_2 \cup A_3| = \left|\bigcup_{i=1}^{3} A_i\right| = \sum_{i=1}^{3}|A_i| - (|A_1 \cap A_2| + |A_1 \cap A_3| + |A_2 \cap A_3|) + |A_1 \cap A_2 \cap A_3| =$$

$$= 25 + 20 + 33 - (15 + 25 + 20) + 15 = 33$$