תרגול 6: תת-חבורות נורמליות

הגדרה: תהי G חבורה ו $H \le G$ אם לכל $g \in G$ מתקיים $gH = Hg$ אז H נקראת **תת חבורה נורמלית** של G והיא תסומן ע"י $H \lhd G$ (בשיעור סומן כן $H \trianglelefteq G$).

משפט: התנאים הבאים שקולים:

1. $H \lhd G$
2. $\forall g \in G\ gHg^{-1} = H$
3. $\forall g \in G, gHg^{-1} \subseteq H$.
4. $\forall h \in H, \forall g \in G, g^{-1}hg \in H$ (תנאי זה ייקרא להלן **קריטריון הנורמליות**)

דוגמאות:

1. כל ת"ח של חבורה אבלית היא נורמלית. $ab = ba \Leftrightarrow aba^{-1} = b$ ולכן קל להראות שתנאי 4 מתקיים.
2. לכל חבורה G נגדיר את **המרכז** של G להיות:

$$Z(G) = \{g \in G \mid \forall x \in G \qquad gx = xg\}$$

(כלומר המרכז היא קבוצת כל האיברים G שמתחלפים עם כל אברי G).

מראים כמו בדוגמא 1 ש $Z(G) \lhd G$.

3. לא כל ת"ח היא נורמלית. לדוגמא: $G = S_3$, תהי $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$. קל לראות ש $\pi^2 = id$ ולכן $o(\pi) = 2$, כלומר $H := <\pi> = \{id, \pi\}$.

טענה: H לא תת חבורה נורמלית של G.

הוכחה: תהי $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \in G$. שוב מתקיים $\sigma^2 = id$ **ולכן** $\sigma = \sigma^{-1}$ **ולכן** $\sigma\pi\sigma^{-1} = \sigma\pi\sigma$.

נחשב את ערכי $\sigma\pi\sigma$: $\sigma\pi\sigma(1) = 3, \sigma\pi\sigma(2) = 2, \sigma\pi\sigma(3) = 1$. כלומר

$\sigma\pi\sigma^{-1} = \sigma\pi\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \notin H$. ולכן H לא תת חבורה נורמלית של G (כי לא מתקיים קריטריון הנורמליות).

4. איך "דרדסנו" את דוגמא 3? בחרנו חבורה לא אבלית G, לקחנו איבר $\pi \in G$ מסדר 2. נשים לב שאם $<\pi>$ היא נורמלית, אזי לכל $g \in G$ מתקיים $g\pi g^{-1} \in <\pi> = \{e, \pi\}$ אבל אז בהכרח $g\pi g^{-1} = \pi$, כי אם $g\pi g^{-1} = e$ אזי נכפול משמאל ב g^{-1} ומימין ב g ונקבל $\pi = e$ בסתירה לכך שהוא מסדר 2. לכן קיבלנו ש $g\pi g^{-1} = \pi \Rightarrow g\pi = \pi g$ לכל $g \in G$. כלומר $\pi \in Z(G)$. לכן כדי למצוא דוגמא לת"ח לא נורמלית מסדר 2, מספיק לקחת איבר $\pi \notin Z(G)$.
5. תרגיל בית: מצאו תת-חבורה לא נורמלית של $GL_2(\mathbb{Q})$.

<u>תרגיל בית:</u> הראו (ללא שימוש במשפטים/תרגילים בהמשך התרגול) שאם $H \lhd G$ אזי לכל $g \in G$ מתקיים $< g > H \le G$.

<u>תרגיל:</u> יהי $A, B \lhd G$ הוכח: $A\bigcap B \lhd G$ (כלומר חיתוך של תתי חבורות נורמליות הוא תת חבורה נורמלית).

<u>הוכחה:</u> לפי משפט $A\bigcap B \le G$ נותר להוכיח ש $gA\bigcap Bg^{-1} = A\bigcap B$ נוכיח זאת לפי ההגדרות

$$g(A\bigcap B)g^{-1} = \{gxg^{-1} \mid x \in A\bigcap B\} = \{gxg^{-1} \mid x \in A \wedge x \in B\}$$
$$= \{gxg^{-1} \mid x \in A\}\bigcap\{gxg^{-1} \mid x \in B\} = A\bigcap B \square$$

<u>תרגיל:</u> תהי $H \le G$ $[G:H]=2$ הוכח: $H \lhd G$

<u>הוכחה:</u> מכיוון ש $[G:H]=2$ אז קיימות רק 2 מחלקות שמאליות אחת מהן שווה ל $eH = H$ והאחרת שווה ל aH (לכל $a \in G \setminus H$) ומתקיים $G = H \dot{\bigcup} aH$ (איחוד זר) באופן דומה עבור המחלקות ימניות מתקיים $G = H \dot{\bigcup} Ha$ ולכן נקבל $aH = Ha$. □

<u>דוגמא:</u> תהי $G = S_3$, וניקח $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$. בדקו ש $o(\pi) = 3$. אי לכך, $H := < \pi > = \{id, \pi, \pi^2\}$. נקבל לפי לגרנג': $[G:H] = \frac{|G|}{|H|} = \frac{6}{3} = 2$, ולכן $H \lhd G$.

<u>הגדרה:</u> **גרעין** של הומ' φ מוגדר כ: $\ker(\varphi) = \{g \in G \mid \varphi(g) = e_H\}$

<u>הגדרה:</u> **תמונה** של העתקה מוגדרת כ: $\mathrm{Im}(\varphi) = \{h \in H \mid \exists g \in G, \varphi(g) = h\}$

<u>משפט:</u> $K\mathrm{er}\,\varphi \le G$ ו $\mathrm{Im}\,\varphi \le H$.

<u>משפט:</u> $\ker\varphi \lhd G$

<u>תרגיל:</u> הוכיחו או הפריכו: $\mathrm{Im}\,\varphi \lhd H$.

<u>פתרון:</u> נפריך: נקח בדוגמא 3 מקודם $I_G|_{<\pi>} : < \pi > \to G$ (הומ' הזהות של G מצומצם לתת החבורה $< \pi >$).
התמונה היא $< \pi >$ והיא אינה נורמלית ב G.

<u>הערה:</u> המשפט הנ"ל מספק תנאי **מספיק** לכך שת"ח היא נורמלית. אם $H \le G$ ונצליח למצוא חבורה K יחד עם הומ' $\varphi : G \to K$ כך שהגרעין הוא בדיוק H, אזי H היא תח"נ של G. נראה דוגמא לכך בתרגיל הבא:

תרגיל: יהיו A,B חבורות. מצאו שתי תח"נ לא טריויאליות של $A\times B$.

הוכחה:

בתחילה נראה הגיוני לבחור את A,B כתח"נ, אבל זאת תהיה טעות, כיוון ש A,B **אינן** תת-חבורות של $A\times B$!

נגדיר $\begin{matrix} \bar{A}:=\{(a,e_B)\mid a\in A\} \\ \bar{B}:=\{(e_A,b)\mid b\in B\} \end{matrix}$,

אזי נראה שמתקיים $A\times B \vartriangleleft \bar{A},\bar{B}$.

$$\pi_A : A\times B\to A, \pi_A((a,b))=a$$
$$\pi_B : A\times B\to B, \pi_B((a,b))=b$$

מהו הגרעין של האיזומורפיזם π_A ? תשובה: $\ker\pi_A=\bar{B}$ לכן $\bar{B}\vartriangleleft A\times B$ באותו אופן מוכיחים $\bar{A}\vartriangleleft A\times B$.

משפט: φ חח"ע ערכית $\Leftrightarrow$ $\ker\varphi=\{e_G\}$.

תרגיל: יהיו $N,H\le G$ תתי חבורות. הוכיחו שאם $N\vartriangleleft G$ אז $NH\le G$. (שימו לב שלא בהכרח $NH\vartriangleleft G$).

פתרון: מספיק להוכיח ש- $NH=HN$ לפי משפט מתחילת התרגול הקודם. יהי $x\in NH$, ואז $x=ab$ כך ש $a\in N,b\in H$. לפי נורמליות N, מתקיים $Nb=bN$ ולכן קיים $a'\in N$ כך ש $ab=ba'\in HN$. לכן $NH\subseteq HN$. בצורה דומה מראים הכלה בכיוון השני.

תרגיל:
יהיו $N,H\le G$ תתי חבורות. הוכיחו שאם $N\vartriangleleft G,H\vartriangleleft G$ אז $NH\vartriangleleft G$.
הוכחה: $NH\le G$, לפי התרגיל הקודם . נותר לכן להוכיח את הנורמליות

$$\forall g\in G, g^{-1}(nh)g=g^{-1}ngg^{-1}hg=$$
$$(g^{-1}ng)(g^{-1}hg)\underset{N,H\vartriangleleft G}{=}\bar{n}\bar{h}\in NH$$

לכן לפי קריטריון הנורמליות מהתרגול הקודם נקבל ש $NH\vartriangleleft G$.

תרגיל:
תהי G חבורה כלשהי, ותהי $H\le G$ התת חבורה הנוצרת על ידי כל הריבועים של איברי G . הוכח: $H\vartriangleleft G$.
הוכחה: כשאנו אומרים חבורה נוצרת ע"י איברים ת ... $g_1,g_2,...,g_n,...$ אז כל איבר בחבורה הוא מכפלה סופית של איברים אלו ושל הפכיהם במקרה שלנו
מתקיים $h\in H, g_i\in G, h=g_1^2*g_2^2*...*g_n^2$

אז לכל $a \in G, aha^{-1} = a^{-1}g_1^2 g_2^2 ... g_n^2 a = (a^{-1}g_1^2 a)(a^{-1}g_2^2 a)...*(a^{-1}g_n^2 a) = (a^{-1}g_1 a)^2 (a^{-1}g_2 a)^2 ...*(a^{-1}g_n a)^2 \in H$ ולכן לפי קריטריון הנורמליות קיבלנו $H \lhd G$ $gHg^{-1} \subseteq H \Rightarrow$ כנדרש.

<u>חבורת המנה:</u>

<u>! משפט:</u> תהי $H \lhd G$ קבוצת המחלקות $\{aH \mid a \in G\}$ עם כפל תתי קבוצות של G ($aHbH = abH$) מהווה חבורה.

כלומר לקחנו תת-חבורה נורמלית ויצרנו בעזרתה ובעזרת החבורה המקורית חבורה חדשה חבורה זו נקראת **חבורת המנה**.

בהוכחת המשפט יש להראות שהכפל מוגדר היטב. מה הכוונה? שפעולת הכפל היא חד ערכית, כלומר אם $aH = cH, bH = dH$ אזי $aHbH = cHdH$.

תרגיל בית: הראו שהכפל מוגדר היטב ע"פ תכונות של מחלקות שמאליות.

<u>הערה:</u>

שימו לב שהגדרת הכפל הזאת הגיונית רק במקרה ש H נורמלית ב G, אחרת כלל לא ודאי שמתקיים $aHbH = abH$.

תרגיל בית: מצאו חבורה G ותת חבורה H כך שכפל של שתי מחלקות שמאליות אינו מחלקה שמאלית .

<u>סימון:</u> יהי $H \lhd G$ אז **חבורת המנה** תסומן ע"י G/H .

<u>משפט:</u> $|G/H| = [G:H] = \frac{|G|}{|H|}$

<u>משפט:</u> אם $K \lhd H \lhd G$ וגם $K \lhd G$ אזי $|G/K| = |G/H||H/K|$.

<u>דוגמאות:</u>

1. $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}_n$.

איך ניתן להראות זאת (נראה דרך קלה יותר בהמשך בעזרת משפטי האיזומורפיזם)? מספיק להראות ש $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ היא ציקלית מסדר n, וכידוע כל חבורה ציקלית מסדר n היא איזומורפית ל $\mathbb{Z}_n$.

בדקו כעת ש $1+n\mathbb{Z}$ יוצר את $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ והוא מסדר n.

2. $\mathbb{Z}_n / m\mathbb{Z}_n \cong \mathbb{Z}_m$, כאשר m|n.

בודקים בצורה דומה ש $1+m\mathbb{Z}_n$ יוצר את החבורה. כאן קל להוכיח שהסדר של $\mathbb{Z}_n / m\mathbb{Z}_n$ הוא m:

משתמשים במשפט $m = \frac{n}{n/m} = \frac{|\mathbb{Z}_n|}{|m\mathbb{Z}_n|} = [\mathbb{Z}_n : m\mathbb{Z}_n] = |\mathbb{Z}_n / m\mathbb{Z}_n|$.

<u>תרגיל:</u>

הראו ש $\mathbb{R}^* / \mathbb{R}^{*2}$ היא חבורה סופית.

<u>הוכחה:</u>

נרצה לבדוק "מהי" חבורת המנה $\mathbb{R}^* / \mathbb{R}^{*2}$ (כלומר אם אנחנו יכולים לזהות אותה – עד כדי איזומורפיזם – עם חבורה אחרת שאנו מכירים). נזכור ששני איברים a,b הם שקולים במנה אם ורק אם $b^{-1}a = \frac{a}{b} \in \mathbb{R}^{*2}$. נשים לב ש $\mathbb{R}^{*2} = \mathbb{R}^{*>0}$ (המספרים הממשיים החיוביים), ולכן נסיק ששני איברים הם שקולים אם הם בעלי אותו סימן , לכן יש רק שתי מחלקות שקילות, האיברים החיוביים והאיברים השליליים. כבר ראינו שהחבורה היחידה עם שני איברים היא $\mathbb{Z}_2$ ולכן $\mathbb{R}^* / \mathbb{R}^{*2} \cong \mathbb{Z}_2$.

<u>תרגיל ממבחן תשס"ז, מועד ב':</u>

א. הוכיחו שלחבורת המנה $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ אין תת-חבורה איזומורפית ל- $\mathbb{Z}$.

ב. הוכיחו שהחבורה $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ אינה נוצרת סופית.

<u>פתרון:</u>

א. כל איבר ב $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ הוא מהצורה $\frac{m}{n}+\mathbb{Z}$. האיבר $\frac{m}{n}+\mathbb{Z}$ הוא מסדר שמחלק את n , כיוון ש $n(\frac{m}{n}+\mathbb{Z}) = \frac{nm}{n}+\mathbb{Z} = m+\mathbb{Z} = \mathbb{Z}$. לכן כל האיברים ב- $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ הם מסדר סופי, ואם היתה ת"ח איזומורפית ל $\mathbb{Z}$ אזי היה איבר מסדר אינסופי היוצר אותה.

ב. כיוון שכל איבר בחבורה הוא מסדר סופי, והחבורה היא אבלית, נקבל שהת"ח הנוצרת מקבוצה סופית של איברים היא סופית, וב- $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ יש אינסוף איברים (לדוגמא $\{\frac{1}{2^n}+\mathbb{Z} \mid n \in \mathbb{N}\}$, **הראו שכל האיברים בקבוצה שונים זה מזה**).