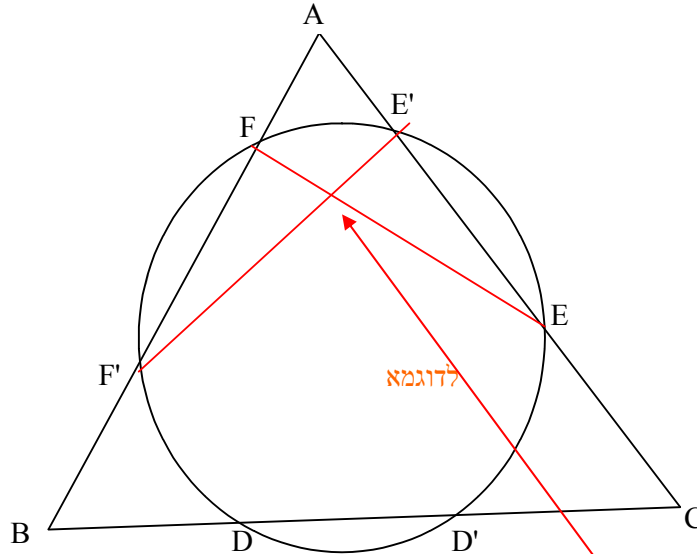


524-88-תרגיל 1-פתרון:

1. התבוננו בשרטוט הנ"ל והראו כי קונקורנטיים $CF, BE, AD \Leftrightarrow AD', BE', CF'$ קונקורנטיים.



פתרון:

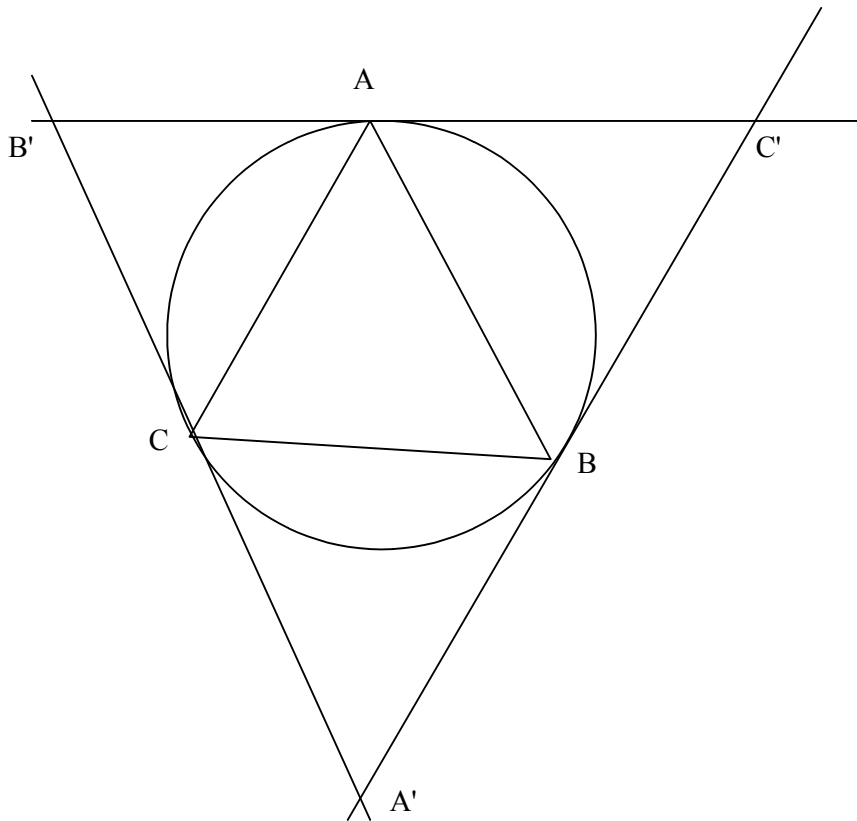
נשים לב כי $\begin{cases} \Delta AFE \approx \Delta AE'F' \\ \Delta BF'D' \approx \Delta BDF \\ \Delta CD'E' \approx \Delta CED \end{cases}$ שלושתם בשל זווית אחת משותפת וזווית אחת היקפית זהה, לכן:

$$CF', BE', AD' \stackrel{Ceva}{\Leftrightarrow} \frac{AF'}{F'B} \frac{BD'}{D'C} \frac{CE'}{E'A} = 1 \stackrel{\substack{\text{דמיון} \\ \text{והופכי}}}{\Leftrightarrow} \frac{AF}{FB} \frac{BD}{DC} \frac{CE}{EA} = 1 \stackrel{Ceva}{\Leftrightarrow} CF, BE, AD \text{ קונקורנטיים}$$

קונקורנטיים

2. יהי משולש ABC חסום במעגל. נעביר משיקים למעגל בנקודות C, B, A כך ש-
 המשיקים דרך B ו C נפגשים ב A'
 " " C ו A " "
 " " B ו A " "
 " " A ו B " "
 " " C ו B " "

א. שרטטו שרטוט מתאים.



ב. הוכיחו: AA', BB', CC' קונקורנטיים (רמז: Ceva ל $A'B'C'$).

ממשפט ידוע כי המשיקים היוצאים מאותה נק' שווים לכן:

$$\frac{B'C}{CA'} \cdot \frac{A'B}{BC'} \cdot \frac{C'A}{AB'} = 1$$

ג. האם ומדוע $AC \cap A'C'$, $AB \cap A'B'$, $BC \cap B'C'$ קולינאריים?

לפי דסרג: הם בפרספ' מנק' ולכן בפרספ' מישר.

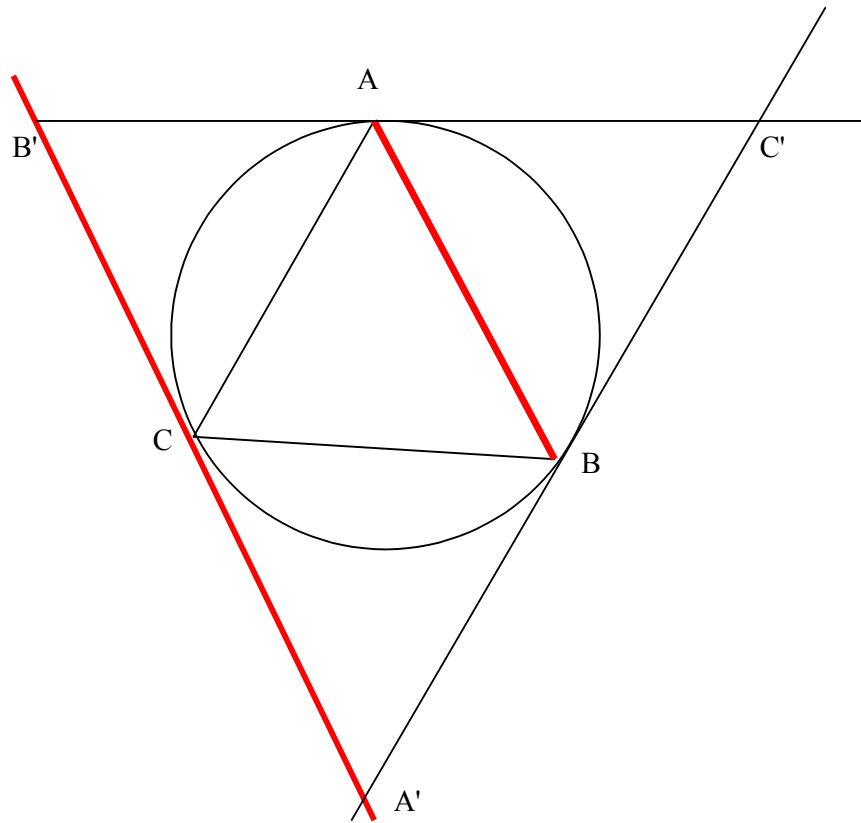
ד. האם ההנחה ב-ג' תמיד נכונה? כלומר, מצאו את כל המיקרים בהם חיתוכים שכאלו אינם מתקיימים ב- R^2 , ונסחו טענות המתאימות למקרים אלו.

$$: AB \parallel A'B'$$

יכול להיות ש- $AB \parallel A'B'$ ב- R^2 . (כאשר המשולש שווה שוקיים). במקרה זה, אם נסמן

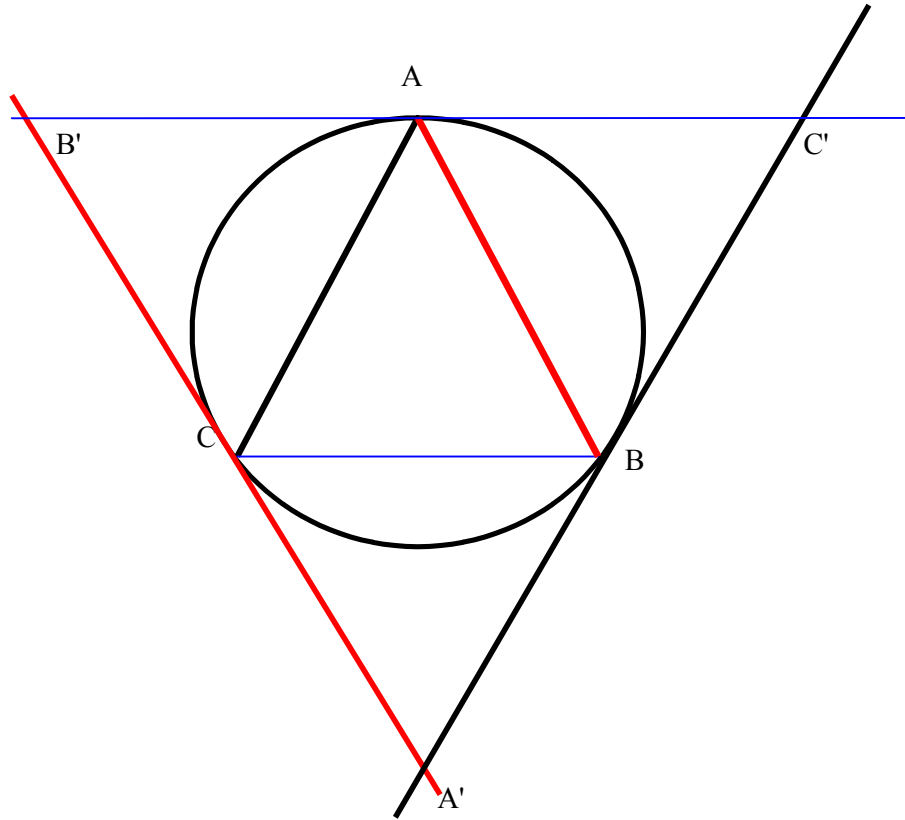
$$\{ \text{הנקודה ב-} \infty \text{ עם שיפוע המתאים לשיפוע } AC \} = p = AC \cap A'C'$$

במקרה זה הישר דרך $AB \cap A'B'$, $BC \cap B'C'$ יעבור דרך p .



$$: AB \parallel A'B', AC \parallel A'C', BC \parallel B'C'$$

כאשר המשולש שווה צלעות, כל זוג צלעות מתאימות מקבילות זו לזו. גם במקרה זה חיתוכי הצלעות יהיו קולינאריים – כולן יהיו על הישר באינסוף.



3. יהי R שדה המספרים הממשיים ו $R^* = R - \{0\}$.
 תהי $G = (R^*, \cdot)$ ו- $X = R^2 - \{(0,0)\}$ ונגדיר:
 $\forall (g, (x, y)) \in R^* \times X \quad g * (x, y) = (g \cdot x, g \cdot y)$

א. היזכרו מקורס באלגברה מופשטת מהי פעולה על קבוצה והראו ש $*$ מגדיר פעולה של החבורה G על הקבוצה X .

הערה: מרחב המנה נקרא RP^1 .

ב. יהי F שדה סופי בעל p איברים, יהי $F^* = F - \{0\}$ ונגדיר:
 $\forall (a, (x, y)) \in F^* \times (F^2 - \{(0,0)\}) \quad (a, (x, y)) \mapsto (ax, ay) \in F^2 - \{(0,0)\}$
 הראו שבכך הגדרנו פעולה של החבורה F^* על $F^2 - (0,0)$.

פעולה של חבורה G על קבוצה X היא פונקציה $G \times X \rightarrow X$ שמקיימת שתי תכונות:

$g_1 * (g_2 * x) = (g_1 g_2) * x$ (2) $1_G * x = x$ (1)
גם (ב-א) וגם (ב-ב) יש להראות קיום שתי תכונות אלו.

ג. נגדיר את מרחב המנה $FP^1 = (F^2 - (0,0)) / F^*$. כמה איברים יש בו?

ד. באותו אופן נגדיר את מרחב המנה $FP^n = (F^{n+1} - (0, \dots, 0)) / F^*$. כמה איברים יש בו?

$$|FP^1| (*) = |F^2 - (0,0)| / |F-0| = (p^2-1)/(p-1) = p+1 \quad (\alpha)$$

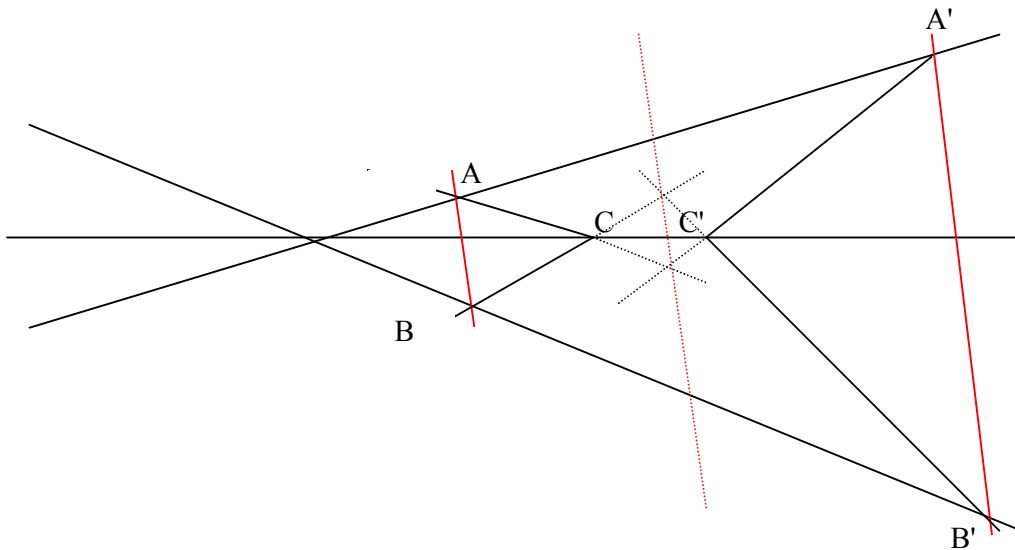
$$|FP^n| (*) = |F^{n+1} - (0, \dots, 0)| / |F-0| = (p^{n+1}-1)/(p-1) \quad (\tau)$$

4. ע"פ משפט דזרג שני משולשים $ABC, A'B'C'$ הם בפרספקטיבה מישר \Leftrightarrow הם בפרספקטיבה מנקודה.

קבעו האם המקרים הבאים יכולים להתרחש ושרטטו שרטוט מתאים למקרים שכן אשר ימחישו את משפט דזרג:

א. $AB \parallel A'B'$ ואין זוג מקביל נוסף.

יכול להתרחש - במקרה זה הישר המחבר את שתי נקודות החיתוך מקביל לזוג הצלעות המקבילות.

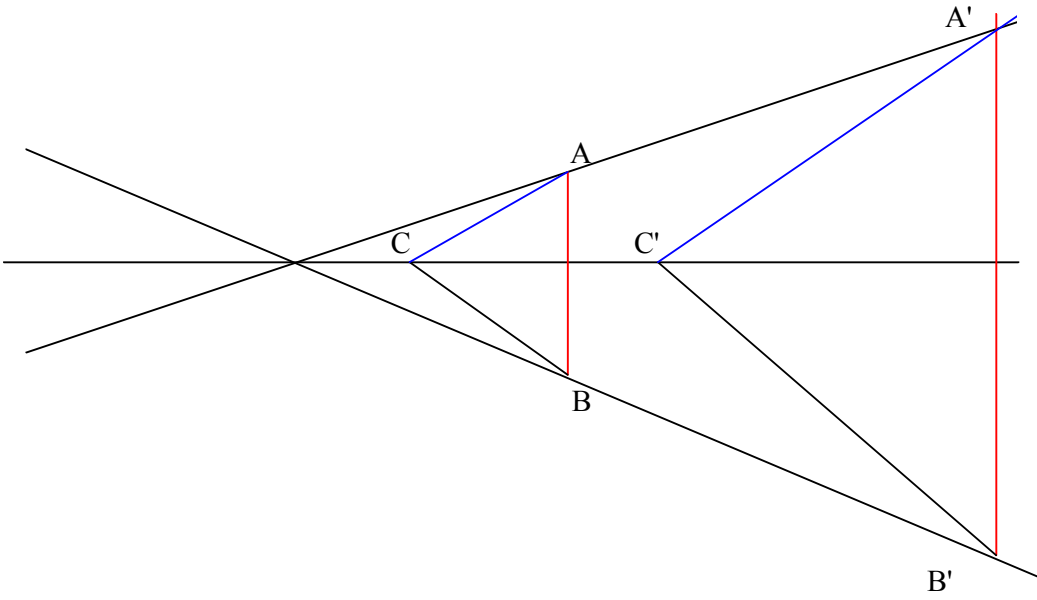


ב. $AB \parallel A'B' \wedge AC \parallel A'C'$ ואין זוג מקביל נוסף.

לא יכול להתרחש - אם יש 2 זוגות של צלעות מקבילות אז גם הזוג השלישי יהיה של צלעות מקבילות (זאת מכיוון שלא ניתן לחבר 2 נקודות באינסוף עם נקודה שאיננה באינסוף בקו ישר).

ג. $AB \parallel A'B' \wedge AC \parallel A'C' \wedge BC \parallel B'C'$.

במקרה זה I, J, K יהיו על הישר באינסוף.



בהצלחה!