

תרגיל בית 10 בהסתברות וסטטיסטיקה מתמטית

88-373 סמסטר ב' תשפ"א

צימודים

תרגיל 1. יהיו X ו- Y משתנים מקריים עם ערכים ב- \mathbb{R} , ותהי $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ מדידה. לכל משתנה מקרי Z , נסמן על ידי \mathcal{L}_Z את ההתפלגות ש- Z מגדיר על \mathbb{R} . הראו כי

$$\|\mathcal{L}_{h(X)} - \mathcal{L}_{h(Y)}\|_{TV} \leq \|\mathcal{L}_X - \mathcal{L}_Y\|$$

תרגיל 2. יהיו $0 < \lambda < \mu$.

א. חשבו את מרחק total variation בין $\text{Poi}(\lambda)$ ל- $\text{Poi}(\mu)$, כאשר חושבים על שתי ההתפלגויות כהתפלגויות על \mathbb{N}_0 .

ב. תנו דוגמה לצימוד של $\text{Poi}(\lambda)$ ו- $\text{Poi}(\mu)$ שאינו הצימוד שבו המשתנים הם בלתי-תלויים.

ג. האם הצימוד שמצאתם הוא צימוד מקסימלי?

ד. חשבו בשיטה שראינו בתרגול את הצימוד המקסימלי של ההתפלגויות האלו. אתגר: האם קיבלתם את הצימוד המקורי?

ה. האם אחד המשתנים האלו שולט סטוכסטית על השני?

תרגיל 3. יהיו $X \sim \text{Ber}(p)$ ו- $Y \sim \text{Ber}(q)$. מה יכולים להיות הערכים של $P(X \neq Y)$? תנו דוגמה לצימודים שמשיגים את כל הערכים שטענתם.

תרגיל 4. נסתכל על תהליך גלטון-ווטסון $\{X_n\}$ המתחיל עם $X_0 = 1$ והתפלגות צאצאים כלשהי. נסתכל על תהליך גלטון-ווטסון נוסף $\{Y_n\}$ עם אותה התפלגות צאצאים, אבל שמתחיל ב- $Y_0 = 2$. הראו ש- $P(Y_n = 0) \leq P(X_n = 0)$.

תהליכי פואסון

תרגיל 5. יהי $\{X_t\}_{t \geq 0}$ תהליך פואסון עם קצב $\lambda = 1$.

א. מה ההסתברות שקרו שמונה מאורעות בין זמן 0 לזמן 10?

ב. מה ההסתברות שקרו שמונה מאורעות בין זמן 0 לזמן 10 וגם שני מאורעות בין זמן 9 לזמן 11?

תרגיל 6. יהי $\{X_t\}_{t \geq 0}$ תהליך פואסון עם קצב λ , ויהי W_1 זמן ההמתנה עד למאורע הראשון. מהי ההתפלגות של W_1 בהינתן $X_t = 1$ ל- t מסוים?

תרגיל 7. יהי $\{X_t\}_{t \geq 0}$ תהליך פואסון עם קצב $\lambda = 2$ בשעה, ויהיו $\{W_n\}_{n > 0}$ זמני ההמתנה.

א. מהי ההסתברות שהמאורע הראשון יתרחש אחרי חצי שעה?

ב. אם לא קרה אף מאורע בשעה הראשונה, מצאו את $P(W_1 > 3)$.

ג. בהינתן שהמאורע השלישי קרה אחרי שעתיים בדיוק, מהי ההסתברות שהמאורע הרביעי יקרה אחרי לפחות ארבע שעות?

ד. התחלתי לצפות בתהליך אחרי עשר שעות. יהי T הזמן שבו קרה המאורע הראשון שאני רואה. מצאו את $E[T]$ ואת $\text{Var}(T)$.

בהצלחה!