

תרגיל בית 7 - אינפי 3

18 בדצמבר 2016

שאלה 1

נתונה פונקציה

$$f(x, y) = \begin{cases} xy \cdot \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

הוכח שכאן אינו מתקיים שוויון של נגזרות מעורבות, כלומר $f_{xy}(0, 0) \neq f_{yx}(0, 0)$. תנו הסבר למה זה קורה.

שאלה 2

תהי $f(x, y) = e^x \cos(y)$. חשבו את הדיפרציאל של f מסדר 3 בנקודות $(0, 0)$ ו- $(0, \frac{\pi}{2})$.

שאלה 3

חשבו פולינום טיילור של $f(x, y) = e^{x^2} \cdot \sin(2y)$ בסיס נקודה $(0, 0)$ מסדר 5.

הדרכה:

לא מומלץ לגזור את הפונק' פעמים! השתמשו בטורים ידועים:

$$\sin(y) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{(-1)^n y^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad e^{x^2} = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{x^{2n}}{n!}$$

טור טיילור של f הוא $f(x, y) = \left(1 + x^2 + \frac{x^4}{2!} + \dots\right) \cdot \left(y - \frac{y^3}{3!} + \frac{y^5}{5!} - \dots\right)$

תכפילו כמה איברים הראשונים ועבר פולינום טיילור בחרו את אותם איברים עם מעלה

שאינה עולה על 5.

שאלה 4

תהי $f(x, y) = e^{x^2 y^3}$

(א) כתבו פולינום טיילור של f סביב $(0, 0)$ עד סדר 19.

רמז: כמו מקודם השתמשו בטורים ידועים.

ב) מהיא $\frac{\partial f}{\partial x^8 \partial y^{11}}(0, 0)$?

שאלה 5

מצא טור טיילור סביב הנקודה $(0, 0)$ של $f(x, y) = \frac{x}{1+y^2}$.

רמז: השתמשו בטור הנדסי.

שאלה 6

יהיו $a, b \in \mathbb{R}$, כתבו מחדש את הפולינום טיילור מסדר 3 סביב הנקודה (a, b) .

שאלה 7

כתוב פיתוח טיילור של $f(x, y)$ סביב הנקודה $(\frac{\pi}{2}, 0)$ עד סדר 2.

שאלה 8

תהי פונקציה של משתנה 1, גזירה ברציפות k פעמים בקטע פתוח $I \in \mathbb{R}$ כך

ש- $0 \in I$. נגדיר $f(x, y) = g(x, y)$. הוכח $d^k f(0, 0) = g^{(k)}(0)(x+y)^k$.