ב"א אנליזה 1 תשעט מועד א

1. חשבו את הגבולות הבאים:

(א) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(x^{10})\cdot e^{\sin(7x)}}{(1-\cos(5x))^5}$

פתרון: נציג את הגבול כמכפלה של גבלות ידועים

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x^{10})\cdot e^{\sin(7x)}}{(1-\cos(5x))^5}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x^{10})}{x^{10}}\cdot\frac{\left((5x)^2\right)^5}{(1-\cos(5x))^5}\cdot\cdot e^{\sin(7x)}\cdot\frac{x^{10}}{\left((5x)^2\right)^5}$$

$$=1\cdot 2^5\cdot 1\cdot\frac{1}{25^5}=\left(\frac{2}{25}\right)^5$$

(ב) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin(x^2)}{x}$

פתרון: כיוון ש $\sin(x^2)$ חסומה ו $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}=0$ נקבל ש $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin(x^2)}{x}=0$

(ג) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n!)^2}{n^n}$

פתרון: נשתמש בכלל המנה, נגדיר $a_n=\frac{(n!)^2}{n^n}$ ואז

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=a_{n+1}\cdot\frac{1}{a_n}=\frac{((n+1)!)^2}{(n+1)^{n+1}}\cdot\frac{n^n}{(n!)^2}=\left(\frac{(n+1)!}{n!}\right)^2\cdot\frac{1}{n}\cdot\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1}=\frac{(n+1)^2}{n}\cdot\left(\frac{n+1-1}{n+1}\right)^{n+1}=$$

$$=\frac{(n+1)^2}{n}\cdot\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}\to\infty\cdot\frac{1}{e}=\infty$$

ולכן $\lim a_n=\infty$.

2. נביט בפונקציה

$$f(x)=\begin{cases}e^x & x\geq 0\\ \frac{\sin(x)}{x}+ax & x<0\end{cases}$$

(א) לאילו ערכי a הפונקציה $f(x)$ רציפה ב $x=0$?

פתרון: על מנת שהפונקציה תהיה רציפה ב $x=0$ צריך להתקיים

$$\lim_{x\to 0}f(x)=f(0)$$

שזה שקול לכך ש

$$\lim_{x\to0^+} f(x) = f(0) = \lim_{x\to0^-} f(x)$$

כלומר

$$\lim_{x\to0^+} e^x = 1 = \lim_{x\to0^-} \frac{\sin(x)}{x} + ax$$

כיוון שהשיוויון השמאלי תמיד מתקיים נבדוק את מתי השיוויון הימני מתקיים: לכל a, מתקיים

$$\lim_{x\to0^-}\left(\frac{\sin(x)}{x}+ax\right) = \lim_{x\to0^-}\frac{\sin(x)}{x} + \lim_{x\to0^-} ax = 1+0=1$$

ולכן גם השיוויון השמאלי מתקיים תמיד ולכן לכל a הפונקציה f רציפה ב $x=0$.

(ב) לאילו ערכי a הפונקציה $f(x)$ גזירה ב $x=0$? מהי $f'(0)$ במקרים אלו?

פתרון: פונקציה שגזירה בנקודה, רציפה בה לכן נבדוק גזירות ב $x=0$ לפונקציה

$$f(x)=\begin{cases} e^x & x\ge 0 \\ \frac{\sin(x)}{x}+ax & x<0\end{cases}$$

(לכל a, כמו שראינו בסעיף קודם). לפי הגדרה, צריך לחשב את הגבול

$$f'(0)=\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x}$$

שזה שקול לכך ש

$$\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x}$$

וערך זה שווה ל $f'(0)$. נחשב:

$$\lim_{x\to0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to0^-}\frac{\frac{\sin(x)}{x}+ax-1}{x} = \lim_{x\to0^-}\frac{\sin(x)-x}{x^2}+a = 0+a=a$$

כאשר מתבססים על

$$\lim_{x\to0^-}\frac{\sin(x)-x}{x^2} \underbrace{=}_{\frac{0}{0},\text{L'Hopital}} \lim_{x\to0^-}\frac{\cos(x)-1}{2x} \underbrace{=}_{\frac{0}{0},\text{L'Hopital}} \lim_{x\to0^-}\frac{-\sin(x)}{2} = 0$$

ומצד שני

$$\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to0^+}\frac{e^x-1}{x} = 1$$

ולכן שני הגבולות שווים אם ורק אם $a=1$ וזה המקרה היחיד בו f גזירה ב $x=0$ והנגזרת במקרה זה שווה $f'(0)=1$.

3. חשבו את הגבולות של שתי הסדרות הבאות, הנתונות על ידי כלל הנסיגה:

(א) $a_{n+1}=a_n\cdot e^{a_n}$ כאשר $a_1>0$.

פתרון:

נוכיח זאת באינדוקציה ש $a_n>0$:

- בסיס $n=1$: נתון ש $a_1>0$ ואכן הוא חיובי.

- צעד - נניח נכונות עבור n, כלומר $0 < a_n$. נוכיח נכונות עבור $n+1$, כלומר $0 < a_{n+1}$. לפי הגדרת הסדרה, נקבל:

$$a_{n+1} = a_n \cdot e^{a_n} > 0 \cdot e^0 = 0$$

וקיבלנו ש $a_{n+1} > 0$ כנדרש.

מסקנה: הסדרה עולה. הוכחה: לכל n, לפי הגדרת הסדרה מתקיים

$$a_{n+1} - a_n = a_n \cdot e^{a_n} - a_n = a_n \left(e^{a_n} - 1\right) > 0 \cdot \left(e^0 - 1\right) = 0$$

ולכן $a_{n+1} > a_n$.

כעת, **אם** הסדרה חסומה מלמעלה היא מתכנסת לגבול סופי L, כלומר $a_n \to L$ ולכן $a_{n+1} \to L$ ומהגדרת הסדרה

$$L \leftarrow a_{n+1} = a_n \cdot e^{a_n} \to Le^L$$

ולכן $L = Le^L$. כיוון שהסדרה a_n עולה, $a_n \geq a_1 > 0$ ולכן $L > 0$. ובפרט אפשר לחלק בו לקבל $1 = e^L$ ומכאן ש $L = 0$ וקיבלנו סתירה. לכן הסדרה אינה חסומה ומתקיים שגבולה הוא ∞.

(ב) $a_{n+1} = a_n \cdot e^{-a_n}$ כאשר $a_1 > 0$.

פתרון:

נוכיח זאת באינדוקציה ש $a_n > 0$:

- בסיס $n = 1$: נתון ש $a_1 > 0$ ואכן הוא חיובי.
- צעד - נניח נכונות עבור n, כלומר $0 < a_n$. נוכיח נכונות עבור $n+1$, כלומר $0 < a_{n+1}$. לפי הגדרת הסדרה, נקבל:

$$a_{n+1} = a_n \cdot e^{-a_n} > 0 \cdot e^{-a_n} = 0$$

וקיבלנו ש $a_{n+1} > 0$ כנדרש.

מסקנה: הסדרה יורדת. הוכחה: לכל n, לפי הגדרת הסדרה מתקיים

$$a_{n+1} - a_n = a_n \cdot e^{-a_n} - a_n = a_n \left(e^{-a_n} - 1\right) < a_n \cdot \left(e^0 - 1\right) = 0$$

ולכן $a_{n+1} < a_n$.

כעת, ראינו שהסדרה חסומה מלמטה ע"י 0 ולכן היא מתכנסת לגבול סופי L, כלומר $a_n \to L$ ולכן $a_{n+1} \to L$ ומהגדרת הסדרה

$$L \leftarrow a_{n+1} = a_n \cdot e^{a_n} \to Le^L$$

ולכן $L = Le^L$ ולכן $0 = L\left(e^L - 1\right)$ או ש $L = 0$ או ש $e^L - 1 = 0$ שגורר ש $L = 0$. קיבלנו אפשרות אחת ל L והוא גבול הסדרה $L = 0$.

.4

(א) מצאו כמה פתרונות יש למשוואה $e^x - x = 1$.

פתרון: נגדיר פונקציה

$$f(x) = e^x - x - 1$$

ונשאל שאלה שקולה: כמה שורשים יש ל $f(x)$. נגזור

$$f'(x) = e^x - 1$$

ולכן $f'(x)=0$ אמ"מ $x=0$. מהטבלה

x	-1	0	1
$f'(x)$	$-$	0	$+$

נסיק כי f יורדת ממש ב $(-\infty,0)$ ועולה $(0,\infty)$ ולכן בקרנות אלו f יכולה להיחתך לכל היותר פעם אחת בלבד עם ציר x (כלומר שורש אחד לכל היותר) וגם $x=0$ נקודת מינימום. מתקיים כי $f(0)=0$ולכן זוהי $x=0$ שורש יחידי של f שהרי לכל $x\neq 0$ מתקיים

$$f(x)>f(0)=0$$

(ב) מצאו כמה פתרונות יש למשוואה $e^x=x+\frac{x^2}{2}$.

פתרון: נגדיר פונקציה

$$f(x)=e^x-x-\frac{x^2}{2}$$

ונשאל שאלה שקולה: כמה שורשים יש ל $f(x)$. נגזור

$$f'(x)=e^x-1-x$$

שראינו בסעיף הקודם שיש לה מינימום יחיד ב $f'(0)=0$ ולכן $f'\geq 0$ תמיד ולכן f עולה בכל $\mathbb{R}$ ולכן יכולה להיחתך לכל היותר פעם אחת בלבד עם ציר x (כלומר שורש אחד לכל היותר)

בנוסף: מתקיים כי

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}e^x-x-\frac{x^2}{2}=\{0-\infty-\infty\}=-\infty$$
$$\lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{x\to\infty}e^x-x-\frac{x^2}{2}=\lim_{x\to\infty}e^x\left(1-\frac{x}{e^x}-\frac{x^2}{2e^x}\right)=\{\infty\cdot(1-0-0)\}=\infty$$

כאשר הגבול באינסוף חושב עם הגבול

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{e^x}\underbrace{=}_{\frac{\infty}{\infty},\text{L'Hopital}}\lim_{x\to\infty}\frac{2x}{e^x}\underbrace{=}_{\frac{\infty}{\infty},\text{L'Hopital}}\lim_{x\to\infty}\frac{2}{e^x}=0$$

ולכן קיימים $c<0$ ו $d>0$ כך ש $f(c)<0, f(d)>0$. כעת, בקטע $[c,d]$ הפונקציה f מחליפה סימן ורציפה ולכן לפי משפט ערך הביניים מתאפסת שמה. לכן יש ל f שמה שורש. מכיוון של f לכל היותר שורש אחד נקבל של f יש בדיוק שורש אחד.

5. תהיא f פונקציה שגזירה בכל $\mathbb{R}$.

(א) הוכיחו שאם f פונקציה עולה וגם $f>1$ בכל $\mathbb{R}$, אזי $f+\frac{1}{f}$ עולה.

פתרון: אם f עולה אזי $f'>0$. בנוסף

$$\left(f+\frac{1}{f}\right)'(x)=f'(x)-\frac{f'(x)}{[f(x)]^2}=f'(x)\left[1-\frac{1}{[f(x)]^2}\right]$$

ולכן, כיוון ש $f'>0$ ו $f>1$ נקבל ש $f'(x)>0$ וגם $\left[1-\frac{1}{[f(x)]^2}\right]>\left[1-\frac{1}{1^2}\right]=0$ ולכן $\left(f+\frac{1}{f}\right)'(x)=f'(x)\left[1-\frac{1}{[f(x)]^2}\right]>0$ ולכן $f+\frac{1}{f}$ עולה כנדרש.

(ב) הוכיחו/הפריכו: אם $f(x)$ עולה אז גם $f(f(x))$ פונקציה עולה.

פתרון: הוכחה: אם לכל $x<y$ מתקיים כי $f(x)<f(y)$. אז לכל $x<y$ מתקיים $f(x)<f(y)$ ואז

$$f\left(f(x)\right)<f\left(f(y)\right)$$

כנדרש.