

תרגיל בית 7 אלגברה מופשטת 2

1. הוכיחו או הפריכו עבור תח"ש $S \subseteq R$:

(א) כל איבר אי-פריק ב $S[x]$ הוא אי-פריק ב $R[x]$.

(ב) כל איבר אי-פריק ב $R[x]$ הוא אי-פריק ב $S[x]$.

2. חוג R נקרא reduced אם לכל $x \in R$, $x = 0 \Leftrightarrow x^2 = 0$.

(א) הוכיחו כי חוג קומוטטיבי הוא reduced אם"ם אין בו איברים נילפוטנטים פרט ל-0.

(ב) הוכיחו כי חוג קומוטטיבי אם"ם הוא reduced וחיתוך של כל שני אידיאלים לא אפסיים הוא לא אפס.

3. (א) הוכיחו כי בחוג \mathcal{O}_d , אם איברים x, y הם חברים אז $N(x) = \pm N(y)$.

(ב) הסיקו כי $3 + \sqrt{2}, 5 + 2\sqrt{2} \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ הם לא חברים.

(ג) תנו דוגמא לאיברים בעלי אותה נורמה, שהם לא חברים ולא צמודים זה לזה.

4. יהי $d \in \mathbb{Z}$ חופשי מריבועים, ונתבונן בחוג

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ bd & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{Z} \right\} \subseteq M_2(\mathbb{Z})$$

(א) הוכיחו כי $\varphi: \mathbb{Z}[\sqrt{d}] \rightarrow S$ המוגדר ע"י $\varphi(a + b\sqrt{d}) = \begin{pmatrix} a & b \\ bd & a \end{pmatrix}$ הוא איזומורפיזם של חוגים.

(ב) הוכיחו כי אם $d \equiv 1 \pmod{4}$ אז $\varphi: \mathcal{O}_d \rightarrow \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b\frac{d-1}{4} & a+b \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{Z} \right\}$ הוא איזומורפיזם.

(ג) חשבו מהי התמונה של הנורמה של איבר כללי ב- \mathcal{O}_d (כלומר מהו $\varphi(N(x))$ עבור איבר כללי $x \in \mathcal{O}_d$ בכל אחד מהמקרים $d \equiv 1 \pmod{4}$, $d \not\equiv 1 \pmod{4}$).

5. נתבונן בחוג $\mathbb{Z}[\sqrt{3}]$ ובאידיאל $I = \langle -5 + \sqrt{3} \rangle$.

(א) הוכיחו כי בחוג המנה $\mathbb{Z}[\sqrt{3}]/I$ יש 22 איברים.

(ב) נגדיר $\varphi: \mathbb{Z}[\sqrt{3}] \rightarrow \mathbb{Z}_{11}$ ע"י $\varphi(a + b\sqrt{3}) = a + 5b$. השתכנעו שזהו איפמורפיזם.

(ג) הוכיחו כי $I \not\subseteq \ker \varphi$.

(ד) הוכיחו כי $\mathbb{Z}[\sqrt{3}]/\langle -5 + \sqrt{3}, 11 \rangle \cong \mathbb{Z}_{11}$.

6. קבעו ונמקו האם האיברים הבאים הם אי-פריקים בחוג המצויין, באם הם פריקים-מצאו פירוק שלהם:

(א) 7 בחוג $\mathbb{Z}[i]$.

(ב) $1 + 3i$ בחוג $\mathbb{Z}[i]$.

(ג) 23 בחוג $\mathbb{Z}[\sqrt{-19}]$.

7. מצאו את כל הפתרונות או הוכיחו כי אין פתרונות מעל \mathbb{Z} למשוואות:

$$(א) \quad x^2 + y^2 = 3z^2$$

$$(ב) \quad x^2 + 1 = y^3$$

$$(ג) \quad x^2 + 19 = y^3$$