פתרון תרגיל בית 10 במבנים אלגבריים
89-214 סמסטר א' תשפ"ג

שאלה 1 (חימום)**.**

א. ודאו כי $\mathbb{Z}_{12}/\langle 3\rangle \cong \mathbb{Z}_3$ באופן ישיר, על ידי כתיבת כל איברי חבורת המנה ואת לוח הכפל שלה.

ב. הסבירו מה הבעיה בטענה "$\mathbb{Z}_{12}/\mathbb{Z}_4 \cong \mathbb{Z}_3$" (רמז: מספיק משפט אחד).

ג. תנו דוגמה ל-$n \geq 3$ שעבורו $\mathbb{Z}_n/\langle 3\rangle \ncong \mathbb{Z}_3$.

פתרון.

א. נזכור כי איברי חבורת המנה $\mathbb{Z}_{12}/\langle 3\rangle$ הם מחלקות של תת־החבורה $\langle 3\rangle = \{0,3,6,9\}$ ב-$\mathbb{Z}_{12}$. אלו הם

$$0+\langle 3\rangle = \{0,3,6,9\}$$
$$1+\langle 3\rangle = \{1,4,7,10\}$$
$$2+\langle 3\rangle = \{2,5,8,11\}$$

נכתוב את לוח הכפל במפורש:

$\cdot$	$0+\langle 3\rangle$	$1+\langle 3\rangle$	$2+\langle 3\rangle$
$0+\langle 3\rangle$	$0+\langle 3\rangle$	$1+\langle 3\rangle$	$2+\langle 3\rangle$
$1+\langle 3\rangle$	$1+\langle 3\rangle$	$2+\langle 3\rangle$	$0+\langle 3\rangle$
$2+\langle 3\rangle$	$2+\langle 3\rangle$	$0+\langle 3\rangle$	$1+\langle 3\rangle$

לוח הכפל של $\mathbb{Z}_{12}/\langle 3\rangle$

מפה אפשר לראות את האיזומורפיזם באופן ישיר - $a+\langle 3\rangle \mapsto a$.

ב. $\mathbb{Z}_4$ אינה תת־חבורה של $\mathbb{Z}_{12}$.

ג. ניקח למשל $n=4$. אז ב-$\mathbb{Z}_4$ מתקיים $\langle 3\rangle = \mathbb{Z}_4$, לכן $\mathbb{Z}_4/\langle 3\rangle \cong \{0\}$ חבורה טריוויאלית.

שאלה 2. הוכיחו את האיזומורפיזמים הבאים באמצעות משפט האיזומורפיזמים הראשון (או בכל דרך אחרת):

א. $(\mathbb{Z}\times\mathbb{Z})/\langle(1,1)\rangle \cong \mathbb{Z}$

ב. $(\mathbb{Z}\times\mathbb{Z})/\langle(2,2)\rangle \cong \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}_2$

ג. $\mathbb{C}^*/\mathbb{T} \cong \mathbb{R}_+$
כאשר $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z| = 1\}$ ו-$\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x > 0\}$ לגבי הפעולה של כפל רגיל.

פתרון.

א. נגדיר $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ לפי: $f(a,b) = a - b$. תחילה נבדוק כי f הומומורפיזם:

$$\begin{aligned} f((a,b)+(a',b')) &= f(a+a', b+b') = (a+a') - (b+b') \\ &= (a-b) + (a'-b') = f(a,b) + f(a',b') \end{aligned}$$

וזה נכון לכל $(a,b),(a',b') \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. הגרעין של f הוא:

$$\ker f = \{(a,b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \,|\, a - b = 0\} = \{(a,b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \,|\, a = b\} = \langle (1,1) \rangle$$

f על כי לכל $a \in \mathbb{Z}$ מתקיים $f(a,0) = a$. אם כן, לפי משפט האיזומורפיזמים הראשון:

$$(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}) / \langle (1,1) \rangle \cong \mathbb{Z}$$

ב. נגדיר $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_2$ לפי $f(a,b) = (a - b, b \bmod 2)$. תחילה נבדוק כי f הומומורפיזם:

$$\begin{aligned} f((a,b)+(a',b')) &= f(a+a', b+b') = ((a+a') - (b+b'), (b+b') \bmod 2) \\ &= ((a-b), b \bmod 2) + ((a'-b'), b' \bmod 2) \\ &= f(a,b) + f(a',b') \end{aligned}$$

וזה נכון לכל $(a,b),(a',b') \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. שימו לב שנעזרנו בכך ש-$\mathbb{Z}$ ו-$\mathbb{Z}_2$ הן חבורות לגבי הפעולות המוכרות שלהן. הגרעין של f הוא:

$$\ker f = \{(a,b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \,|\, a - b = 0, b \bmod 2 = 0\} = \{(a,b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \,|\, a = b \in 2\mathbb{Z}\} = \langle (2,2) \rangle$$

f על כי לכל $(a,b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_2$ יש מקור תחת f:
אם $b = 0$, אז $f((a,0) = (a,b)$. אם $b = 1$, אז $f(a+1,1) = (a,b)$.
אם כן, לפי משפט האיזומורפיזמים הראשון:

$$(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}) / \langle (2,2) \rangle \cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_2$$

ג. נגדיר $f : \mathbb{C}^* \to \mathbb{R}_+$ לפי: $f(z) = |z|$. תחילה נבדוק כי f הומומורפיזם. לפי תכונות הערך המוחלט:

$$f(z \cdot z') = |z \cdot z'| = |z| \cdot |z'| = f(z) \cdot f(z')$$

הגרעין של f הוא:

$$\ker f = \{z \in \mathbb{C}^* \,|\, |z| = 1\} = \mathbb{T}$$

f על כי לכל $x \in \mathbb{R}_+$ מתקיים $f(x) = |x| = x$. אם כן, לפי משפט האיזומורפיזמים הראשון:

$$\mathbb{C}^*/\mathbb{T} \cong \mathbb{R}_+$$

שמזכיר לנו את ההצגה הקוטבית למספרים מרוכבים.

שאלה 3. הפריכו את הטענות השגויות הבאות:

א. אם חבורת המנה ${}^{G}\!/_{N}$ ציקלית ולא טריוויאלית, אז G אבלית.

ב. אם חבורת המנה ${}^{G}\!/_{N}$ סופית ולא טריוויאלית, אז G סופית.

ג. אם תת־החבורה $N \lhd G$ וחבורת המנה G/N אבליות, אז G אבלית.

פתרון.

א. נבחר $G = S_3$ ואת $N = A_3$ שראינו בכיתה שהיא נורמלית ב-S_3. החבורה ${}^{G}/_{N}$ מסדר 2 (שהוא ראשוני) ולכן ציקלית. אבל G אינה אבלית.

ב. נבחר $G = \mathbb{Z}$ ואת $N = 2\mathbb{Z}$. אז ${}^{G}/_{N} \cong \mathbb{Z}_2$ מסדר 2, אבל G אינסופית.

ג. הבחירה בסעיף הראשון של $G = S_3$ ו-$N = A_3$ מפריכה גם את הטענה כאן.

שאלה 4. לחבורה $G = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ יש בדיוק שבע תת־חבורות מאינדקס 4. מצאו לפחות שלוש מהן והוכיחו שחבורות המנה לגביהן לא תמיד איזומורפיות.

אתגר רשות: מצאו את כל תת־החבורות מאינדקס 4 ואת חבורות המנה לגביהן.

פתרון. תת־חבורות לדוגמה הן $H_1 = 4\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, $H_2 = \mathbb{Z} \times 4\mathbb{Z}$ ו-$H_3 = 2\mathbb{Z} \times 2\mathbb{Z}$. חבורות המנה G/H_1 ו-G/H_2 שתיהן איזומורפיות ל-$\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ שהיא ציקלית, ואילו G/H_3 איזומורפית ל-$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ שאינה ציקלית. אפשר להוכיח את האיזומורפיזמים האלו בעזרת שאלה 6.

שאלה 5. תהי G חבורה ותהיינה H, K תת־חבורות נורמליות המקיימות $H \cap K = \{e\}$. הוכיחו כי G איזומורפית לתת־חבורה של ${}^{G}/_{K} \times {}^{G}/_{H}$.

פתרון. נתבונן בהעתקה: $f \colon G \to {}^{G}/_{K} \times {}^{G}/_{H}$ המוגדרת לפי

$$f(g) = (gH, gK)$$

תחילה יש להוכיח שזהו הומומורפיזם. אכן, לכל $g_1, g_2 \in G$ מתקיים

$$f(g_1 g_2) = (g_1 g_2 H, g_1 g_2 K) = (g_1 H, g_1 K)(g_2 H, g_2 K) = f(g_1) f(g_2)$$

כשהשיוויון האמצעי נובע מהנורמליות של H ושל K. יהי $g \in \ker(f)$. כלומר מתקיים עבורו

$$f(g) = (gH, gK) = e_{G/K \times G/H} = (H, K)$$

ידוע לנו ש-$gH = H, gK = K$ אם ורק אם $g \in K$ וגם $g \in H$. כלומר

$$g \in H \cap K = \{e\}$$

אם כן, הגרעין של f הוא טריוויאלי ולכן f שיכון.

שאלה 6. תהיינה $G_1, \ldots, G_n$ חבורות ותהיינה $H_1, \ldots, H_n$ תת־חבורות נורמליות שלהן, בהתאמה (כלומר $H_i \lhd G_i$ לכל i).

א. הוכיחו כי $H_1 \times \cdots \times H_n \lhd G_1 \times \cdots \times G_n$.

ב. הוכיחו כי $(G_1 \times \cdots \times G_n) \,/\, (H_1 \times \cdots \times H_n) \cong G_1/H_1 \times ... \times G_n/H_n$.

פתרון.

א. קל לראות כי $H_1 \times \cdots \times H_n$ היא תת־חבורה של $G_1 \times \cdots \times G_n$. כדי להראות שהיא נורמליות, נבדוק שהיא סגורה להצמדה באיבר של $G_1 \times \cdots \times G_n$. יהיו

$$(g_1, \ldots, g_n) \in G_1 \times \cdots \times G_n, \qquad (h_1, \ldots, h_n) \in H_1 \times \cdots \times H_n$$

אז נחשב

$$\begin{aligned}(g_1, \ldots, g_n)(h_1, \ldots, h_n)(g_1, \ldots, g_n)^{-1} &= (g_1 h_1, \ldots, g_n h_n)\left(g_1^{-1}, \ldots, g_n^{-1}\right) \\ &= \left(g_1 h_1 g_1^{-1}, \ldots, g_n h_n g_n^{-1}\right)\end{aligned}$$

לכל $1 \leq i \leq n$, תת־החבורה H_i נורמלית ב-G_i ולכן $g_i h_i g_i^{-1} \in H_i$. קיבלנו כי $\left(g_1 h_1 g_1^{-1}, \ldots, g_n h_n g_n^{-1}\right) \in H_1 \times \cdots \times H_n$, כדרוש.

ב. נעזר במשפט האיזומורפיזמים הראשון (הבינו למה כך פותרים את שני הסעיפים הראשונים בבת אחת). מפני ש-$H_i \lhd G_i$, אזי ${}^{G_i}/_{H_i}$ חבורה לכל i, ולכן המכפלה הקרטזית ${}^{G_1}/_{H_1} \times \cdots \times {}^{G_n}/_{H_n}$ היא חבורה. נגדיר העתקה

$$\pi \colon G_1 \times \cdots \times G_n \to G_1/H_1 \times ... \times G_n/H_n$$
$$(g_1, \ldots, g_n) \mapsto (g_1H_1, \ldots, g_nH_n)$$

שקל לראות שהיא על, כי היא "מכפלה קרטזית" של הטלות. נבדוק שהיא הומומורפיזם:

$$\begin{aligned}\pi(g_1,\ldots,g_n)\,\pi(g_1',\ldots,g_n') &= (g_1H_1,\ldots,g_nH_n)(g_1'H_1,\ldots,g_n'H_n)\\ &= (g_1g_1'H_1,\ldots,g_ng_n'H_n) = \pi(g_1g_1',\ldots,g_ng_n')\\ &= \pi((g_1,\ldots,g_n)(g_1',\ldots,g_n'))\end{aligned}$$

אגב, לכל קבוצה של הומומורפיזמים $f_i \colon G_i \to K_i$ הפונקציה $f\colon \prod_i G_i \to \prod_i K_i$ המוגדרת כך שברכיב ה-i נקבל $g_i \mapsto f_i(g_i)$ היא הומומורפיזם. נחשב את הגרעין של π:

$$\begin{aligned}\ker\pi &= \left\{(g_1,\ldots,g_n)\in G_1\times\cdots\times G_n \,\middle|\, \pi(g_1,\ldots,g_n) = e_{G_1/H_1\times\cdots\times G_n/H_n}\right\}\\ &= \{(g_1,\ldots,g_n)\in G_1\times\cdots\times G_n \mid (g_1H_1,\ldots,g_nH_n) = (H_1,\ldots,H_n)\}\\ &= \{(g_1,\ldots,g_n)\in G_1\times\cdots\times G_n \mid \forall i: g_i\in H_i\} = H_1\times\cdots\times H_n\end{aligned}$$

ולפי משפט האיזומורפיזמים הראשון נקבל את הדרוש.

שאלה 7. נתבונן בחבורה ${}^{\mathbb{Q}}/_{\mathbb{Z}}$ $G =$.

א. הוכיחו שהסדר של כל איבר ב-G הוא סופי, אבל שישנם איברים בחבורה מסדר גדול כרצוננו.

ב. הוכיחו או הפריכו: $G \cong \mathbb{Q}$.

ג. לקבוצת איברים $S \subseteq G$ נסמן את תת־החבורה הקטנה ביותר של G שמכילה S בסימון $\langle S\rangle$, ונאמר שהיא תת־החבורה הנוצרת על ידי S ב-G. התבוננו בתת־החבורה $H = \left\langle \frac{2}{5}+\mathbb{Z}, \frac{5}{6}+\mathbb{Z}\right\rangle$. הוכיחו כי H היא ציקלית ומצאו את האינדקס $[G:H]$.
רמז: למעשה רוצים למצוא $\frac{a}{b}\in\mathbb{Q}$ כך ש-$H = \left\langle \frac{a}{b}+\mathbb{Z}\right\rangle$, ולוודא הכלה דו־כיוונית.

ד. מצאו קבוצת איברים $S\subseteq G$ כך שתת־החבורה $K = \langle S\rangle$ היא אינסופית וגם $K \neq G$.
רמז: למה S חייבת להיות אינסופית?

פתרון.

א. איבר היחידה בחבורה G הוא המחלקה $\mathbb{Z} = \mathbb{Z} + 0$. לכן יש למצוא לכל $x \in G$ מספר טבעי $n \in \mathbb{N}$ כך שנקבל $n \cdot x + \mathbb{Z} = \mathbb{Z}$. שימו לב כי החבורה חיבורית ולכן למציאת הסדר "העלאה בחזקה" היא כפל ב-n.
כל איבר בחבורה אפשר לרשום בצורה $x = \frac{a}{b} + \mathbb{Z}$ עבור $a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{N}$. נשים לב כי $b \cdot \left(\frac{a}{b}+\mathbb{Z}\right) = a + \mathbb{Z} = \mathbb{Z}$. לכן x הוא לכל היותר מסדר (סופי) b. נניח כי $\frac{a}{b}$ הוא שבר מצומצם, ולכן הסדר של x במקרה זה הוא בדיוק b. מכאן ברור שבקבוצת האיברים $\left\{\frac{1}{n}+\mathbb{Z}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ יש איברים מסדר גדול כרצוננו.

ב. הפרכה: לפי סעיף א', ב-G כל האיברים מסדר סופי, ואילו ב-$\mathbb{Q}$ כל האיברים חוץ מ-0 מסדר אינסופי, אך ראינו שאיזומורפיזם שומר על סדרי האיברים ולכן לא ייתכן שיש כזה בין החבורות הללו. למעשה אין אפילו הומומורפיזם לא טריוויאלי $\varphi : \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$!
הסבר: יהי $\frac{a}{b} + \mathbb{Z} \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ (נניח בה"כ $b > 0$) מתקיים:
$((\frac{a}{b}+\mathbb{Z})^b = (\frac{a}{b}+\mathbb{Z})+(\frac{a}{b}+\mathbb{Z})+...+(\frac{a}{b}+\mathbb{Z}) = (\frac{a}{b}+\frac{a}{b}+...+\frac{a}{b})+\mathbb{Z} = a+\mathbb{Z} = \mathbb{Z}$
לפי הגדרת הפעולה בחבורת המנה וכיוון ש-$a \in\mathbb{Z}$. לכן $o(\frac{a}{b}+\mathbb{Z}) \leq b$ (אם ניקח שבר מצומצם זה יהיה ממש שיוויון) ובפרט הסדר סופי.

ג. יש להוכיח שקיים איבר $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ כך שמתקיים $H = \left\langle \frac{a}{b} + \mathbb{Z} \right\rangle$. נראה שאפשר לבחור את $\frac{a}{b} = \frac{1}{30}$. בשביל להראות הכלה דו־כיוונית, מספיק להראות הכלה של היוצרים. נשים לב כי $\frac{1}{30} = -2 \cdot \frac{2}{5} + 1 \cdot \frac{5}{6}$, ולכן $\left\langle \frac{1}{30} + \mathbb{Z} \right\rangle \subseteq H$. מצד שני $\frac{2}{5} = 12 \cdot \frac{1}{30}$, $\frac{5}{6} = 25 \cdot \frac{1}{30}$, ולכן $H = \left\langle \frac{1}{30} + \mathbb{Z} \right\rangle$.
סדר תת־החבורה H הוא 30 ואילו G היא אינסופית, ולכן האינדקס שלה היא אינסופי לפי משפט לגראנז'. בנוגע לאינדקס, אפשר להראות גם שלכל שני מספרים ראשוניים $p_1 \neq p_2$ שונים שאינם מחלקים את 30 יתקיים כי $p_1 + H \neq p_2 + H$ ולכן ישנן אינסוף מחלקות שמאליות שונות.

ד. אפשר לבחור את $S = \left\{ \frac{1}{5^i} + \mathbb{Z} \,\middle|\, i \in \mathbb{N} \right\}$, או את $S' = \left\{ \frac{1}{p} + \mathbb{Z} \,\middle|\, p \text{ prime} \wedge p \neq 7 \right\}$.
קל לראות כי $\langle S \rangle$ ו-$\langle S' \rangle$ אינסופיות כי יש בהן איברים מאינסוף סדרים שונים. בפירוט: ב-S האיבר $\frac{1}{5^i} + \mathbb{Z}$ הוא מסדר 5^i, ויש אינסוף בחירות עבור i. ב-S' האיבר $\frac{1}{p} + \mathbb{Z}$ הוא מסדר p, וישנם אינסוף ראשוניים השונים מ-7.
תת־החבורות האלו הן לא כל G מפני ששתיהן לא מכילות את האיבר $\frac{1}{7} + \mathbb{Z}$. אילו היה ניתן להציג אותו כמכפלה של היוצרים והופכיהם, אז

$$\frac{1}{7} + \mathbb{Z} = \left(\frac{1}{b_1} + \mathbb{Z}\right)^{\pm 1} \cdots \left(\frac{1}{b_k} + \mathbb{Z}\right)^{\pm 1} = \frac{a}{\operatorname{lcm}(b_1, \dots, b_k)} + \mathbb{Z}$$

כאשר $\frac{1}{b_i} + \mathbb{Z}$ שייכים ל-S או S' ו-$a \in \mathbb{Z}$ מתאים (השבר באגף ימין לאו דווקא מצומצם). אבל $\operatorname{lcm}(b_1, \dots, b_k)$ לא מתחלק ב-7 לפי בחירת S ו-S', וזה לא ייתכן כי כל נציג אחר של $\frac{1}{7} + \mathbb{Z}$ כשבר מצומצם הוא מן הצורה $\frac{7a'+1}{7} + \mathbb{Z}$ עבור $a' \in \mathbb{Z}$.
תשובה לרמז: הסיבה היא שכל תת־חבורה של G הנוצרת על ידי מספר סופי של איברים היא סופית, ואפילו ציקלית.

שאלה 8. יהי $f \colon G \to H$ איזומורפיזם.

א. הוכיחו שלכל תת־חבורה $K \leq G$ מתקיים כי $K \lhd G$ אם ורק אם $f(K) \lhd H$. כלומר איזומורפיזם שומר על נורמליות של תת־חבורות.

ב. הוכיחו שלכל תת־חבורה נורמלית $N \lhd G$ מתקיים כי $G/N \cong H/f(N)$.

פתרון.

א. מפני ש-f הוא הומומורפיזם, אז $f(K)$ היא תת־חבורה של H. ניתן לראות זאת כי תמונה של הומומורפיזם היא תת־חבורה, ומסתכלים על הצמצום $\overline{f} \colon K \to f(K)$, שגם הוא הומומורפיזם. לכן נשאר לנו להראות גרירה דו־כיוונית של הנורמליות.
נניח $K \lhd G$. נרצה להוכיח $f(K) \lhd H$ לפי סגירות להצמדה. יהי $h \in H$ ויהי $f(k) \in f(K)$. מפני ש-f חח"ע ועל, נוכל להתבונן ב-$g = f^{-1}(h)$. אז $f(g) = h$. לכן

$$hf(k)h^{-1} = f(g)f(k)f(g)^{-1} \stackrel{\star}{=} f(gkg^{-1}) \in f(K)$$

כאשר בשיוויון המסומן $\star$ נעזרנו בכך ש-f הומומורפיזם, ובשלב האחרון השייכות נובעת מכך ש-$gkg^{-1} \in K$, שהרי K נורמלית ב-G. לכן $f(K)$ נורמלית ב-H.
בכיוון השני, נניח $f(K) \lhd H$. מפני ש-f איזומורפיזם, אז $f^{-1} \colon H \to G$ הוא גם איזומורפיזם, וניתן לחזור על הוכחה דומה בכיוון השני. בדרך אחרת, נחשב

$$gKg^{-1} = f^{-1}(f(gKg)) = f^{-1}(f(g)f(K)f(g)^{-1}) \stackrel{\star}{=} f^{-1}(f(K)) = K$$

כאשר בשיוויון המסומן $\star$ נעזרנו בכך ש-$f(K)$ תת־חבורה נורמלית ב-H.

ב. לפי הסעיף הקודם, ברור כי $f(N)$ היא תת־חבורה נורמלית של H. כלומר $H/f(N)$ היא חבורת מנה (ומוגדרת היטב). כעת נמצא איזומורפיזם בין חבורות המנה בשאלה. נגדיר

$$\varphi\colon G \to H/f(N)$$

לפי $\varphi(g) = f(g)f(N)$. שימו לב ששלחנו איבר של החבורה G לאיבר של חבורת המנה $H/f(N)$. נבדוק כי φ הומומורפיזם:

$$\varphi(g_1g_2) = f(g_1g_2)f(N) \overset{\star}{=} f(g_1)f(g_2)f(N) \overset{*}{=} f(g_1)f(N)f(g_2)f(N) = \varphi(g_1)\varphi(g_2)$$

כאשר בשיוויון המסומן $\star$ נעזרנו בכך ש-f הומומורפיזם ובשיוויון המסומן $*$ נעזרנו בכך ש-$f(N)$ תת־חבורה נורמלית ב-H.
קל לראות כי φ היא פונקציה על. לכל $h \cdot f(N) \in H/f(N)$ נבחר $g = f^{-1}(h)$ (שכאמור קיים) ועבורו

$$\varphi(g) = f(g)f(N) = f(f^{-1}(h)) \cdot f(N) = h \cdot f(N)$$

נחשב את הגרעין של φ:

$$\begin{aligned}\ker\varphi &= \left\{g \in G \,\middle|\, \varphi(g) = e_{H/f(N)}\right\} = \{g \in G \,|\, f(g)f(N) = f(N)\} \\ &= \{g \in G \,|\, f(g) \in f(N)\} \overset{*}{=} \{g \in G \,|\, g \in N\} = N\end{aligned}$$

כאשר בשיוויון המסומן $\star$ נעזרנו בכך ש-f חח"ע. מסיימים לפי משפט האיזומורפיזמים הראשון עבור φ, כדי להסיק $G/N \cong H/f(N)$.

שאלות רשות

נצטט את משפטי האיזומורפיזמים השני והשלישי של נתר, ואז נוכיח אותם. לא לדאוג – יש הדרכה.

משפט (משפט האיזומורפיזמים השני)**.** תהי G חבורה, תהי $H \leq G$ תת־חבורה, ותהי $N \lhd G$ תת־חבורה נורמלית. אזי $H \cap N \lhd H$, $N \lhd HN$, וכן

$$^{HN}\!/_{N} \cong {}^{H}\!/_{H\cap N}$$

משפט (משפט האיזומורפיזמים השלישי)**.** תהי G חבורה, ותהיינה $H, K \lhd G$ תת־חבורות נורמליות של G כך ש-$K \subseteq H$. אזי

$$^{(G/K)}\!/_{(H/K)} \cong {}^{G}\!/_{H}$$

שאלה 9. הוכיחו את משפט האיזומורפיזמים השני: יהיו G, H ו-N כמו בניסוח המשפט. נגדיר $f\colon H \to {}^{HN}\!/_{N}$ לפי $f(h) = hN$.

א. הראו ש-f הומומורפיזם.

ב. הראו ש-f על.

ג. הוכיחו כי $\ker f = H \cap N$.

ד. הסיקו את הדרוש לפי משפט האיזומורפיזמים הראשון.

הוכחה.

א. יהיו $h_1, h_2 \in H$. אזי

$$f(h_1 h_2) = h_1 h_2 N \overset{\star}{=} (h_1 N)(h_2 N) = f(h_1) f(h_2)$$

בשיוויון המסומן $\star$ השתמשנו בכך ש-N תת־חבורה נורמלית. לכן f הומומורפיזם.

ב. תהי מחלקה $hnN \in {}^{HN}/_{N}$ עבור $h \in H$ ו-$n \in N$. נשים לב כי $hnN = hN$, ולכן

$$f(h) = hN = hnN$$

ומכאן ש-f על.

ג. נחשב את $\ker f$:

$$\ker f = \left\{h \in H \,\middle|\, f(h) = e_{HN/N}\right\} = \{h \in H \mid hN = N\} = \{h \in H \mid h \in N\} = H \cap N$$

ד. לפי משפט האיזומורפיזמים הראשון,

$${}^{H}/_{H\cap N} \cong {}^{HN}/_{N}$$

$\square$

שאלה 10. הוכיחו את משפט האיזומורפיזמים השלישי: יהיו G, H ו-K כמו בניסוח המשפט. נגדיר $f \colon {}^{G}/_{K} \to {}^{G}/_{H}$ לפי $f(gK) = gH$.

א. הוכיחו ש-f מוגדרת היטב. כלומר אם $g_1 K = g_2 K$, אז $f(g_1 K) = f(g_2 K)$.

ב. הראו ש-f הומומורפיזם.

ג. הראו ש-f על.

ד. הוכיחו כי $\ker f = {}^{H}/_{K}$.

ה. הסיקו את הדרוש לפי משפט האיזומורפיזמים הראשון.

הוכחה.

א. נניח ש-$g_1 K = g_2 K$. לכן $g_1 g_2^{-1} \in K$. אבל $K \subseteq H$, כלומר $g_1 g_2^{-1} \in H$, ולכן $g_1 H = g_2 H$. מכאן $f(g_1 K) = f(g_2 K)$.

ב. יהיו $g_1 K, g_2 K \in {}^{G}/_{K}$. אזי

$$f((g_1 K)(g_2 K)) = f(g_1 g_2 K) = g_1 g_2 H \overset{\star}{=} (g_1 H)(g_2 H) = f(g_1 K) f(g_2 K)$$

בשיוויון המסומן $\star$ השתמשנו בכך ש-H תת־חבורה נורמלית.

ג. יהי $gH \in {}^{G}/_{H}$. לכן $f(gK) = gH$, ומכאן f על.

ד. נחשב את $\ker f$:

$$\ker f = \left\{gK \in {}^{G}/_{K} \,\middle|\, f(gK) = e_{G/H}\right\} = \{gK \in {}^{G}/_{K} \mid gH = H\} = \{gK \in {}^{G}/_{K} \mid g \in H\} = {}^{H}/_{K}$$

ה. לפי משפט האיזומורפיזמים הראשון,

$${}^{(G/K)}/_{(H/K)} \cong {}^{G}/_{H}$$

$\square$

שאלה 11. חבורה G נקראת מטא־אבלית אם יש לה תת־חבורה נורמלית N כך שגם N וגם ${}^{G}/_{N}$ אבליות. הוכיחו שכל תת־חבורה של חבורה מטא־אבלית היא גם מטא־אבלית. רמז: נסו להשתמש באחד ממשפטי האיזומורפיזמים.

בהצלחה!