פתרון תרגיל 5:

1)
$$\begin{cases} u_{tt} - 4u_{xx} = (1-x)\cos(t) , & 0<x<\pi , \ t>0 \\ u(x,0) = \frac{x^2}{2\pi} & 0\le x \le \pi \\ u_t(x,0) = \cos(3x) , & 0\le x\le \pi \\ u_x(0,t) = \cos(t)-1 , & t\ge 0 \\ u_x(\pi,t) = \cos(t) , & t\ge 0 \end{cases}$$

ראשית תנאי השפה לא הומוגניים לכן

נגדיר $u = v + w$ כאשר w הינו פונ' תיקון שלוקחת

את תנאי השפה של u המקוריים. כלומר:

$$\begin{cases} w_x(0,t) = \cos(t) - 1 = a(t) \\ w_x(\pi,t) = \cos(t) = b(t) \end{cases}$$

כמו שראינו בתרגול פונ' התיקון של נוימן היא:

$$w(x,t) = x a(t) + \frac{x^2}{2L}[b(t) - a(t)]$$

כאשר L זה אורך הקטע כיוון $L=\pi$.

$$w(x,t) = x\cdot(\cos(t)-1) + \frac{x^2}{2\pi}(\cancel{\cos(t)} - \cancel{\cos}(t)+1)$$

פונ' התיקון:
$$w(x,t) = x\cos(t) - x + \frac{x^2}{2\pi}$$

כעת נגדיר:

$$v = u - w$$

$$v_{tt} = u_{tt} - w_{tt} ,$$

$$v_{xx} = u_{xx} - w_{xx}$$

$$w_{xx} = \frac{1}{\pi}$$
$$w_t = -x\sin t$$
$$w_{tt} = -x\cos t$$

$$v_{tt} - 4v_{xx} = (u_{tt} - w_{tt}) - 4(u_{xx} - w_{xx})$$

$$V_{tt} - 4V_{xx} = (u_{tt} - 4u_{xx}) - w_{tt} + 4w_{xx}$$

$$\Downarrow$$

$$V_{tt} - 4V_{xx} = (1-x)\cos(t) - (-x\cos(t) + \frac{4}{\pi}$$

$$V_{tt} - 4V_{xx} = \cos(t) - x\cancel{\cos(t)} + x\cancel{\cos(t)} + \frac{4}{\pi}$$

$$V_{tt} - 4V_{xx} = \cos(t) + \frac{4}{\pi}.$$

$$V_x(0,t) = V_x(\pi,t) = 0$$

$$V(x,0) = u(x,0) - w(x,0) = \frac{x^2}{2\pi} - \left(\frac{x^2}{2\pi}\right) = 0$$

$$V_t(x,0) = u_t(x,0) - w_t(x,0) = \cos(3x) - 0 = \cos(3x)$$

$$\begin{cases} V_{tt} - 4V_{xx} = \cos(t) + \frac{4}{\pi} \\ V(x,0) = 0 \\ V_t(x,0) = \cos(3x) \\ V_x(0,t) = V_x(\pi,t) = 0 \end{cases}$$

כעת אפשר להגדיר את $V = V^h + V^p$

כאשר V^h פתרון של ההומוגני שלוקח את תנאי ההתחלה של V

נכתוב את המשוואות ש- V^h ו- V^p מקיימות:

$$\begin{cases} V^h_{tt} - 4V^h_{xx} = 0 \\ V^h(x,0) = 0 \\ V^h_t(x,0) = \cos(3x) \\ V^h_x(0,t) = V^h_x(\pi,t) = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} V^p_{tt} - 4V^p_{xx} = \cos(t) + \frac{4}{\pi} \\ V^p(x,0) = 0 \\ V^p_t(x,0) = 0 \\ V^p_x(0,t) = V^p_x(\pi,t) = 0 \end{cases}$$

שימו לב של- V^p ול- V^h תנאי שפה הומוגניים כמו V.

כמו תמיד נפתור ראשית הומגני: V^h !

$$\begin{cases} V^h_{tt} - 4V^h_{xx} = 0 \\ V^h(x,0) = 0 \\ V^h_t(x,0) = \cos(3x) \\ V^h_x(0,t) = V^h_x(\pi,t) = 0 \end{cases}$$

נעשה הפרדת משתנים: $V^h = X(x)\cdot T(t)$

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T''(t)}{4T(t)} = -\lambda$$

נבדוק תנאי שפה: $V^h_x(0,t) = X'(0)\cdot T(t) = 0 \Rightarrow X'(0) = 0$

$$V^h_x(\pi,t) = X'(\pi)\cdot T(t) = 0 \Rightarrow X'(\pi) = 0$$

$$\Downarrow$$

שטורם ליוביל $\begin{cases} \frac{X''}{X} = \frac{T''}{4T} = -\lambda \\ X'(0) = X'(\pi) = 0 \end{cases}$

$\begin{cases} \frac{X''}{X} = -\lambda \\ X'(0) = X'(\pi) = 0 \end{cases}$ $\leftarrow$ ת. שפה של נוימן

$\lambda<0$ לא רלוונטי.

$\lambda=0$

$$\frac{X''}{X} = 0 \Rightarrow X'' = 0$$

$$X_0'(x) = c_0 \quad ! \quad X_0(x) = c_0 x + d_0$$

נבדוק תנאי שפה: $0 = X_0'(0) = X_0'(\pi) = c_0$

$\Leftarrow$ $c_0 = 0$.

$\boxed{X_0(x) = d_0}$ עבור $\lambda=0$.

$\lambda>0$

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda$$

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0$$

$\underline{\lambda > 0}$

$k^2 + \lambda = 0$

$k = \pm i\sqrt{\lambda}$

$X(x) = c_1 \cos(\sqrt{\lambda}x) + c_2 \sin(\sqrt{\lambda}x)$

$X'(x) = -c_1\sqrt{\lambda}\sin(\sqrt{\lambda}x) + c_2\sqrt{\lambda}\cos(\sqrt{\lambda}x)$

$0 = X'(0) = c_2\sqrt{\lambda} \;\Big|\; : \underset{\lambda > 0 \text{ כי}}{\sqrt{\lambda} \neq 0} \Rightarrow \boxed{c_2 = 0}$

$X'(\pi) = -c_1\sqrt{\lambda}\sin(\sqrt{\lambda}\pi) = 0 \;\Big|\; : \sqrt{\lambda} \neq 0$

נניח ש-$c_1 \neq 0$ אחרת טריוויאלי.

$\sin(\sqrt{\lambda}\pi) = 0 \Rightarrow \sqrt{\lambda}\cancel{\pi} = n\cancel{\pi} \;/(\,)^2$

עבור $n = 0, 1, \ldots$ $\boxed{\lambda_n = n^2}$ מ"ע

$X_n(x) = c_n\cos(\sqrt{n^2}x) = c_n\cos(nx)$ פ"ע

נפתור כעת:

$\frac{T''}{4T} = -n^2$

עבור $n = 0, \Rightarrow \frac{T_0''}{4T_0} = 0 \Rightarrow T_0'' = 0 \Rightarrow T_0(t) = a_0 t + b_0$

עבור $n \neq 0$, $\frac{T_n''}{4T_n(t)} = -n^2 \Rightarrow T_n''(t) + 4n^2 T_n(t) = 0$

פ. אופ': $k^2 + 4n^2 = 0$

$k = \pm 2ni$

$T_n(t) = a_n\cos(2nt) + b_n\sin(2nt)$

$V_0^h(x,t) = X_0(x)\cdot T_0(t) = c_0\cdot(a_0 t + b_0) = \frac{A_0}{2} + \frac{B_0}{2}t$

$V_n^h(x,t) = X_n(x)\cdot T_n(t) = [A_n\cos(2nt) + B_n\sin(2nt)]\cos(nx)$

מסופרפוזיציה נקבל

$V^h(x,t) = \frac{A_0}{2} + \frac{B_0 t}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}[A_n\cos(2nt) + B_n\sin(2nt)]\cos(nx)$

נציב תנאי התחלה.

$$V^h(x,0) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(nx) = 0$$

$$\boxed{A_n = 0} \quad , \quad \boxed{A_0 = 0}$$

$$V_t^h(x,t) = \frac{B_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} 2nB_n \cos(2nt)\cos(nx)$$

$$V_t^h(x,0) = \frac{B_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} 2nB_n \cos(nx) = \cos(3x)$$

מהשוואת מקדמים

$$\boxed{B_0 = 0}$$

$n = 3$ $\qquad 6B_3 = 1 \Rightarrow B_3 = \frac{1}{6}$

$n \neq 3$ $\qquad 2nB_n = 0 \Rightarrow \boxed{B_n = 0}$

לכן :

$$V^h(x,t) = \frac{1}{6}\sin(6t)\cos(3x)$$

כעת נפתור את V^p :

$$\begin{cases} V_{tt}^p - 4V_{xx}^p = \cos(t) + \frac{4}{\pi} \\ V^p(x,0) = V_t^p(x,0) = 0 \\ V_x^p(0,t) = V_x^p(\pi,t) = 0 \end{cases}$$

ראשית כמו שפורייה גילה נדרוש את

$$V^p(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n(t) \cdot \cos(nx)$$

(פו' עצמיות שיוצאות מההומוגני לפי x כפול מקדמים לפי t)

נבדוק דבר ראשון ש- V^p מקיימת תנאי שפה אחרת יש טעות במקום מסוים!

$$V_x^p(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n(t)(-n\sin(nx)) = \sum_{n=1}^{\infty} -nq_n(t)\cdot\sin(nx)$$

$$V_x^p(0,t) = V_x^p(\pi,t) = 0 \quad \checkmark$$

$$V_x^p(0,t) = \sum -nq_n(t)\cdot\sin(0) = 0$$

אכן מתקיים!

$$V_x^p(\pi,t) = \sum -nq_n(t)\sin(n\pi) = 0$$

$$V^p_{tt} - 4V^p_{xx} = \cos(t) + \frac{4}{\pi}$$

$$V^p_{tt} = \sum_{n=0}^{\infty} q_n''(t)\cos(nx)$$

$$V^p_{xx} = \sum_{n=0}^{\infty} -n^2 q_n(t)\cdot\cos(nx)$$

$$\Downarrow$$

$$V^p_{tt} - 4V^p_{xx} = \sum_{n=0}^{\infty}\left[q_n''(t) + 4n^2 q_n(t)\right]\cos(nx) = \left[\cos(t) + \frac{4}{\pi}\right]\cos(0x)$$

נעשה השוואת מקדמים:

$$\begin{cases} n=0: & q_0''(t) = \cos(t) + \frac{4}{\pi} \\ n\neq 0: & q_n''(t) + 4n^2 q_n(t) = 0 \end{cases}$$

נציב תנאי התחלה.

$$V^p(x,0) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n(0)\cdot\underbrace{\cos(nx)}_{\neq 0} = 0 \Rightarrow \forall n,\ q_n(0) = 0$$

כי $\cos(nx)$ פ"ג.

$$V^p_t(x,0) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n'(0)\underbrace{\cos(nx)}_{\neq 0} = 0 \Rightarrow \forall n\ \ q_n'(0) = 0$$

כעת נפתור את המד"ר עם תנאי ההתחלה:

$$n=0: \begin{cases} q_0''(t) = \cos(t) + \frac{4}{\pi} \\ q_0(0) = q_0'(0) = 0. \end{cases}$$

$$n\neq 0: \begin{cases} q_n''(t) + 4n^2 q_n(t) = 0 \\ q_n(0) = q_n'(0) = 0. \end{cases}$$

קל לראות שעבור המקרה ש- $n\neq 0$, $q_n(t) = 0$

נוכיח כאמור: כאשר מד"ר מסדר שני מקדמים קבועים

$$r^2 + 4n^2 = 0 \Rightarrow r = \pm 2ni$$

$$q_n(t) = c_n\cos(2nt) + d_n\sin(2nt)$$

נציב תנאי התחלה:

$$0 = q_n(0) = c_n$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{c_n = 0}$$

$$q_n'(t) = d_n \cdot 2n \cos(2nt)$$

$$0 = q_n'(0) = 2nd_n \Rightarrow \boxed{d_n = 0}$$

⇐ עבור $n \neq 0$ $\quad q_n(t) = 0$.

עבור $n \neq 0$

$$q_0''(t) = \cos(t) + \frac{4}{\pi}$$

$$q_0'(t) = \sin(t) + \frac{4}{\pi}t + \tilde{c}_0$$

$$q_0(t) = -\cos(t) + \frac{2t^2}{\pi} + \tilde{c}_0 t + \tilde{c}_1$$

$$q_0(0) = -1 + \tilde{c}_1 = 0 \Rightarrow \boxed{\tilde{c}_1 = 1}$$

$$0 = q_0'(0) = \tilde{c}_0 \Rightarrow \boxed{\tilde{c}_0 = 0}$$

$$q_0(t) = -\cos(t) + \frac{2t^2}{\pi} + 1$$

לכן רק $n=0$ נכנס בטור של $V^p(x,t)$ ולכן

$$V^p(x,t) = -\cos(t) + \frac{2t^2}{\pi} + 1$$

$$V = V^p + V^h$$

$$V = -\cos(t) + \frac{2t^2}{\pi} + 1 + \frac{1}{6}\sin(6t)\cos(3x)$$

$$u = V + w$$

$$\boxed{u = -\cos(t) + \frac{2t^2}{\pi} + 1 + \frac{1}{6}\sin(6t)\cos(3x) + x\cos(t) - x + \frac{x^2}{2\pi}}$$

(2)

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = \sin(m\pi x)\sin(\omega t), & 0 \le x \le 1, \quad t \ge 0 \\ u(x,0) = u_t(x,0) = 0, & 0 \le x \le 1 \\ u(0,t) = u(1,t) = 0, & t \ge 0 \end{cases}$$

(ב) $W^2 \neq m^2\pi^2$ זאת משוואת גלים לא הומוגנית סוג שני לכן נציג

את u: $u = u^h + u^p$

כאשר u^h פתרון של ההומוגנית וכן u^h לוקחת את תנאי ההתחלה של u. נדרוש את המשוואות ש-u^h ו-u^p מקיימות:

$$\begin{cases} u^h_{tt} - u^h_{xx} = 0 \\ u^h(x,0) = u^h_t(x,0) = 0 \\ u^h(0,t) = u^h(1,t) = 0 \end{cases}, \qquad \begin{cases} u^p_{tt} - u^p_{xx} = \sin(m\pi x)\sin(\omega t) \\ u^p(x,0) = u^p_t(x,0) = 0 \\ u^p(0,t) = u^p(1,t) = 0 \end{cases}$$

שימו לב של - u^h ו - u^p יש אותם תנאי שפה הומוגניים של - u.

כעת נפתור את החלק ההומוגני.

$$\begin{cases} u^h_{tt} - u^h_{xx} = 0 \\ u^h(x,0) = u^h_t(x,0) = 0 \\ u^h(0,t) = u^h(0,t) = 0 \end{cases}$$

נעשה הפרדת משתנים: $u^h(x,t) = X(x) \cdot T(t)$

$$\begin{cases} \frac{X''}{X} = \frac{T''}{T} = -\lambda \\ X(0) = X(1) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0 \\ X(0) = X(1) = 0 \end{cases}$$

$$X(x) = c_1 \cos(\sqrt{\lambda}x) + c_2 \sin(\sqrt{\lambda}x)$$

$$0 = X(0) = c_1 \Rightarrow \boxed{c_1 = 0}$$

$$c_2 \sin(\sqrt{\lambda}) = 0 \;|: c_2 \neq 0$$

$$\sin(\sqrt{\lambda}) = 0$$

$X_n(x) = \sin(n\pi x)$ $\qquad \sqrt{\lambda} = n\pi \;/\; ()^2 \qquad \Rightarrow \lambda_n = (n\pi)^2$

$$T_n(t) = a_n \cos(n\pi t) + b_n \sin(n\pi t)$$

$$u_n(x,t) = X_n(x)\cdot T_n(t) = [A_n \cos(n\pi t) + B_n \sin(n\pi t)] \sin(n\pi x)$$

$$u^h(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} [A_n \cos(n\pi t) + B_n \sin(n\pi t)] \sin(n\pi x)$$

$$u^h(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(n\pi x) = 0 \quad \Rightarrow \boxed{A_n = 0}$$

$$u^h_t(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} n\pi B_n \sin(n\pi x) = 0 \quad \boxed{B_n = 0}$$

נמצא $u^p(x,t)$

$$u^p(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} q_n(t) \sin(n\pi x)$$

$$\begin{cases} u^p_{tt} - u^p_{xx} = \sin(m\pi x)\sin(\omega t) \\ u^p(x,0) = u^p_t(x,0) = 0 \\ u^p(0,t) = u^p(1,t) = 0 \end{cases}$$

נבדוק תנאי שפה:

$$u^p(0,t) = \sum_{n=1}^{\infty} q_n(t)\cdot \sin(0) = 0 \checkmark$$

$$u^p(1,t) = \sum_{n=1}^{\infty} q_n(t) \sin(n\pi) = 0 \checkmark$$

$$u^p_{tt} = \sum_{n=1}^{\infty} q_n''(t)\cdot \sin(n\pi x)$$

$$u^p_{xx} = \sum_{n=1}^{\infty} -n^2\pi^2 \cdot q_n(t) \sin(n\pi x)$$

$$u^p_{tt} - u^p_{xx} = \sum_{n=1}^{\infty} [q_n''(t) + n^2\pi^2 q_n(t)] \sin(n\pi x) = \sin(m\pi x)\sin(\omega t)$$

נשווה מקדמים ה n הפונק' שלנו ונקבל $n=m$.

$$n=m, \quad \begin{cases} q_m'' + m^2\pi^2 q_m = \sin(\omega t) \\ \\ q_n'' + n^2\pi^2 q_n = 0 \end{cases} \quad n\neq m$$

$$\left.\begin{aligned} u^p(x,0) &= \sum_{n=1}^{\infty} q_n(0)\cdot\sin(n\pi x) = 0 \Rightarrow q_n(0)=0 \\ u_t^p(x,0) &= \sum_{n=1}^{\infty} q_n'(0)\cdot\sin(n\pi x) = 0 \Rightarrow q_n'(0)=0 \end{aligned}\right\} \forall n$$

נקבל את המד"ר יחד עם תנאי ההתחלה:

$$n=m \quad \begin{cases} q_m'' + m^2\pi^2 q_m = \sin(\omega t) \\ q_m(0) = q_m'(0) = 0 \end{cases}$$

$$n\neq m \quad \begin{cases} q_n''(t) + n^2\pi^2 q_n(t) = 0 \\ q_n(0) = q_n'(0) = 0 \end{cases}$$

נתון ש- $\omega^2 \neq m^2\pi^2 \Rightarrow \boxed{\omega \neq m\pi}$

$$\begin{cases} q_m'' + m^2\pi^2 q_m(t) = \sin(\omega t) \\ q_m(0) = q_m'(0) = 0 \end{cases}$$

$$q_m(t) = q_m^h(t) + q_m^p(t)$$

$$q_m^{h''}(t) + m^2\pi^2 q_m^h(t) = 0$$

$$r^2 + m^2\pi^2 = 0 \Rightarrow r = \pm m\pi i$$

פתרון הומוגני של $q_m(t)$. $\rightarrow q_m^h(t) = c_m\cos(m\pi t) + d_m\sin(m\pi t)$

כעת נפתור פתרון לא הומוגני:

$$q_m^{p''}(t) + m^2\pi^2 q_m^p(t) = \sin(\omega t)$$

$$q_m^p(t) = A\sin(\omega t) + B\cos(\omega t)$$

$\omega \neq m\pi$ אז q_m^p לא (מוכל) בפתרון ההומוגני!

$$q_m^{p''}(t) = -A\omega^2\sin(\omega t) - B\omega^2\cos(\omega t)$$

$$-Aw^2\sin(wt) - Bw^2\cos(wt) + m^2\pi^2(A\sin(wt) + m^2\pi^2 B\cos(wt)) = \sin(wt)$$

$$\sin(wt)\left[-Aw^2 + Am^2\pi^2\right] + \cos(wt)\left[-Bw^2 + m^2\pi^2 B\right] = \sin(wt)$$

השוואת מקדמים:

$$\begin{cases} B(\overset{\neq 0}{-w^2+m^2\pi^2}) = 0 \Rightarrow \boxed{B=0} \\ A(\underbrace{-w^2+m^2\pi^2}_{\neq 0}) = 1 \Rightarrow A = \dfrac{1}{m^2\pi^2-w^2} \end{cases}$$

כי $w^2 \neq m^2\pi^2$

$$q^p_m(t) = \frac{1}{m^2\pi^2-w^2}\sin(wt)$$

$$q_m(t) = q^h_m(t) + q^p_m(t) = \underbrace{C_m\cos(m\pi t) + d_m\sin(m\pi t)}_{\text{חלק הומוגני}} + \underbrace{\frac{\sin(wt)}{m^2\pi^2-w^2}}_{\text{לא הומוגני}}$$

תנאי התחלה. $q_m(0) = q'_m(0) = 0$

$$q_m(0) = \boxed{C_m = 0} \quad , \quad q'_m(0) = m\pi d_m + \frac{w}{m^2\pi^2-w^2} = 0$$

$$m\pi d_m = -\frac{w}{m^2\pi^2-w^2} \quad \Big| : m\pi \neq 0$$

$$d_m = \frac{w}{(w^2-m^2\pi^2)m\pi}$$

$$q_m(t) = \frac{w}{w^2-m^2\pi^2}\sin(m\pi t) + \frac{\sin(wt)}{m^2\pi^2-w^2}$$

$$\begin{cases} q''_n(t) + n^2\pi^2 q_n(t) = 0 \\ q_n(0) = q'_n(0) = 0 \end{cases}$$

עבור $n \neq m$

$\Leftarrow$ $q_n(t) = 0$ לכל $n \neq m$

נשאר רק המקרה $n=m$ $\quad u^p(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} q_n(t)\cdot\sin(n\pi x)$

$$u^p(x,t) = \left[\left(\frac{w}{w^2-m^2\pi^2}\right)\sin(m\pi t) + \frac{\sin(wt)}{m^2\pi^2-w^2}\right]\sin(m\pi x)$$

$u^h = 0$ לכן $u = u^p$.

עבור ק $\omega^2 = m^2\pi^2 \Leftarrow \omega = m\pi$

כמו בפתרון ק:
$$u^p = \sum_{n=1}^{\infty} q_n(t)\cdot \sin(n\pi x)$$

$$\begin{cases} u^p_{tt} - u^p_{xx} = \sin(m\pi x)\sin(\omega t) \\ u^p(x,0) = u^p_t(x,0) = 0 \\ u^p(0,t) = u^p(1,t) = 0 \end{cases}$$

$$u^p_{tt} - u^p_{xx} = \sum_{n=1}^{\infty}\left[q_n''(t) + n^2\pi^2 q_n(t)\right]\underline{\sin(n\pi x)} = \sin\underline{(m\pi x)}\cdot \sin(\omega t)$$

נשווה מקדמים: מקרה מעניין $n=m$.

$$q_m''(t) + \pi^2 m^2 q_m(t) = \sin(\omega t)$$

$$q_m = q_m^h + q_m^p$$

ראינו בפתרון א: $q_m^h = c_m\cos(m\pi t) + d_m\sin(m\pi t)$

$$q_m^p = ?$$

הפתרון ההומוגני

כעת צריך לנחש פתרון שלא הומוגני

המקרה $\omega = m\pi$ לכן $\sin(\omega t)$ מוכל בתוך הפתרון ההומוגני

ולכן
$$q_m^p = At\cos(m\pi t) + Bt\sin(m\pi t)$$

נציב את הניחוש בתוך המד"ר

$$q_m^{p\,\prime\prime} + m^2\pi^2 q_m^p = \sin(\omega t) \overset{\omega = m\pi}{=} \sin(m\pi t)$$

$$m^2\pi^2 B\sin(m\pi t) + m^2\pi^2 At\cos(m\pi t) = \sin(\pi m t)$$

נשווה מקדמים $A=0$, $B = \frac{1}{m^2\pi^2}$

$$q_m^p(t) = \frac{t}{m^2\pi^2}\sin(m\pi t)$$

$$q_m(t) = q_m^h(t) + q_m^p(t) = c_m\cos(m\pi t) + d_m\sin(m\pi t) + \frac{t\sin(m\pi t)}{m^2\pi^2}$$

$$q_m(0)=0 \Rightarrow c_m=0$$

$$0=q_m'(0) = m\pi d_m \Rightarrow d_m=0$$

$$q_m(t) = \frac{t}{m^2\pi^2}\sin(m\pi t)$$

עבור $n\neq m$
$$\begin{cases} q_n''(t)+n^2\pi^2 q_n(t)=0 \\ q_n(0)=q_n'(0)=0 \end{cases}$$
ולכן $q_n(t)=0$

כי $q_n(t) = c_n\cos(n\pi t)+d_n\sin(n\pi t)$

$$0=q_n(0)=c_n \Rightarrow \boxed{c_n=0}$$

$$0=q_n'(0)=n\pi d_n \Rightarrow \boxed{d_n=0}$$

לכן רק $n=m$ נשאר.

מקבלים $u^p(x,t)=$ נשאר רק $n=m$.

$$u^p(x,t) = \frac{t}{m^2\pi^2}\sin(m\pi t)\cdot\sin(m\pi x)$$

$$u^h=0$$

ולכן
$$u=\underbrace{u^h}_{0}+u^p=u^p$$

$$u=\frac{t}{m^2\pi^2}\sin(m\pi t)\sin(m\pi x).$$

(ג) כאשר $t\to\infty$ u אינו חסום פתרון זה מקבל ערך שנראה כסדרת גלים עם גובה הולך וגדל אופייני לתופעת (״רזוננס״ = התהודה).

③

$$\begin{cases} u_{tt} + u_t - c^2 u_{xx} = 0 , & 0 \le x \le b \quad t \geq 0 \\ u(x,0) = f(x) , & a \le x \le b \\ u_t(x,0) = g(x) , & a \le x \le b \\ u(a,t) = u_x(b,t) = 0 ; & t \geq 0 \end{cases}$$

אינטגרל האנרגיה :

$$E(t) = \frac{1}{2}\int_a^b [u_t^2 + c^2 u_x^2]\, dx$$

א) הוכח כי $E(t)$ מקיים $E'(t) \le 0$ עבור כל t.

ב) בעזרת אינטגרל האנרגיה ותוצאת סעיף א הוכיחו יחידות הפתרון לבעיה הנ"ל.

$$E'(t) = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_a^b [u_t^2 + c^2 u_x^2]\, dx = \frac{1}{2}\int_a^b (2u_t \cdot u_{tt} + 2c^2 u_x \cdot u_{xt})\, dx$$

$$= \int_a^b (u_t \cdot u_{tt} + c^2 u_x \cdot u_{xt})\, dx$$

נשים לב

$$c^2 u_x \cdot u_{xt} = c^2 \cdot \left[\frac{\partial (u_x \cdot u_t)}{\partial x} - u_{xx} u_t\right] =$$

$$= c^2 \frac{\partial (u_x \cdot u_t)}{\partial x} - c^2 u_{xx} \cdot u_t = c^2 \frac{\partial (u_x \cdot u_t)}{\partial x} - u_t \cdot (u_{tt} + u_t) =$$

כי $c^2 u_{xx} = u_t + u_{tt}$ לפי המשוואה.

$$= c^2 \cdot \frac{\partial (u_x \cdot u_t)}{\partial x} - u_t \cdot u_{tt} - u_t^2$$

$$\Downarrow$$

$$= \int_a^b \left[\cancel{u_t \cdot u_{tt}} + c^2 \cdot \frac{\partial (u_x \cdot u_t)}{\partial x} - \cancel{u_t u_{tt}} - u_t^2\right] dx$$

$$= c^2 \int_a^b \frac{\partial (u_x \cdot u_t)}{\partial x}\, dx + \int_a^b -u_t^2\, dx =$$

$$\Downarrow$$

$$E'(t) = c^2\cdot\Big[u_x\cdot u_t \Big|_{x=a}^{x=b} + \int_a^b -u_t^2\,dx$$

$u_x(b,t)=0$ לפי הנתון

$u(a,t)=0$ לפי הנתון $\forall\, t\geq 0$

$$\Downarrow$$

$\underline{u_t(a,0)=0}$

לכן $\Big[u_x\cdot u_t\Big|_{x=a}^{x=b}=0$

$$\Downarrow$$

$$E'(t)=\int_a^b -u_t^2\,dx$$

קיבלנו אינטגרל שהאינטגרנד שלו הוא אי-חיובי ולכן $E'(t)\leq 0$.

ב) נסמן $w=u_1-u_2$ כאשר u_1 ו- u_2 פתרונות של משוואת הגלים (קרים הטלגרף) ול- u_1 ו- u_2 אותם תנאי התחלה ושפה. כלומר:

$$\begin{cases} u_{1tt}+u_{1t}-c^2u_{1xx}=0 \\ u_1(x,0)=f(x) \\ u_{1t}(x,0)=g(x) \\ u_1(a,t)=u_{1x}(b,t)=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} u_{2tt}+u_{2t}-c^2u_{2xx}=0 \\ u_2(x,0)=f(x) \\ u_{2t}(x,0)=g(x) \\ u_2(a,t)=u_{2x}(b,t)=0 \end{cases}$$

$$w_{tt}=u_{1tt}-u_{2tt}\ ,\quad w_t=u_{1t}-u_{2t}\ ,\quad w_{xx}=u_{1xx}-u_{2xx}$$

$$w_{tt}+w_t-c^2w_{xx}=u_{1tt}-u_{2tt}+u_{1t}-u_{2t}-c^2u_{1xx}+c^2u_{2xx}$$

$$=\underbrace{(u_{1tt}+u_{1t}-c^2u_{1xx})}_{\text{כי } u_1 \text{ פתרון } =0}-\underbrace{(u_{2tt}+u_{2t}-c^2u_{2xx})}_{\text{הוא פתרון } u_2 \text{ } =0}=0$$

לפי [illegible]

מכיוון

$$\begin{cases} w_{tt}+w_t-c^2w_{xx}=0 \\ w(x,0)=u_1(x,0)-u_2(x,0)=f(x)-f(x)=0 \\ w_t(x,0)=u_{1_t}(x,0)-u_{2_t}(x,0)=g(x)-g(x)=0 \\ w(a,t)=w_x(b,t)=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} w_{tt}+w_t-c^2w_{xx}=0 \\ w(x,0)=0 \\ w_t(x,0)=0 \\ w(a,t)=w_x(b,t)=0. \end{cases}$$

כעת נעבור לאינטגרל האנרגיה :

$$E(t)=\frac{1}{2}\int_a^b (w_t^2+c^2w_x^2)\,dx$$

ראינו בסעיף ג' כי $E'(t)\le 0$ ולכן $E(t)$

פונ' יורדת כמו כן לפי הנתון $w_t(x,0)=0$ ולכן $w_t^2(x,0)=0$

כמו כן $w(x,0)=0$ לכל $a\le x\le b$ ולכן $w_x(x,0)=0$

ולכן $w_x^2(x,0)$ שווה ל-0.

$$E(0)=0 \Leftarrow E(0)=\frac{1}{2}\int_a^b [\underbrace{w_t(x,0)}_{=0}]^2+c^2[\underbrace{w_x(0,t)}_{=0}]^2]\,dx=0$$

ולכן $E(t)\le 0$ כמו כן מהגדרת $E(t)$ נובע ש-

$E(t)\ge 0$ כיוון שהאינטגרנד של $E(t)$ הוא (אי-שלילי)

סה"כ $E(t)\le 0$; $E(t)\ge 0$ ולכן נובע ש- $E(t)=0$.

ונקבל ש- $E(t)=0$ כמו כן מכיוון ש- $w_t^2+c^2w_x^2\ge 0$

והאינטגרל של פונ' זו בקטע $[a,b]$ מתאפס נובע כי $w_t^2+c^2w_x^2=0$

כלומר $w_t(x,t)=w_x(x,t)=0$, ולכן $w(x,t)=const$ ועל פי תנאי

ההתחלה $w(x,0)=0$ כלומר $w=0$ קיבלנו יחידות

דבר בסתירה לשלילה.

מ.ש.ל.

4)

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 2t + (9t+31)\sin\left(\frac{3x}{2}\right) & 0 \le x \le \pi \ ; \ t \ge 0 \\ u(0,t) = t^2 \ , = a(t) & t \ge 0 \\ u_x(\pi,t) = 1 \ , = b(t) & t \ge 0 \\ u(x,0) = x + 3\pi \ , & 0 \le x \le \pi \end{cases}$$

תנאי השפה לא הומוגניים ולכן נגדיר $u = v + w$

כאשר w היא פונ' תיקון. $w(x,t) = a(t) + xb(t)$

כאשר פו' התיקון מקבלת את תנאי השפה של u.

$$w(x,t) = t^2 + x$$

כעת נגדיר $v = u - w$ ונפתור את הבעיה על v.

$$v_t = u_t - w_t \qquad , \quad w_t = 2t$$

$$v_{xx} = u_{xx} - w_{xx}$$

$$v_t - v_{xx} = u_t - w_t - u_{xx} + w_{xx} = (u_t - u_{xx}) - (w_t - \underbrace{w_{xx}}_{0}) =$$

מהגדרת w פולינום ממעלה I ב-x

$$v_t - v_{xx} = \cancel{2t} + (9t+31)\sin\left(\frac{3x}{2}\right) - \cancel{2t}$$

$$v_t - v_{xx} = (9t+31)\sin\left(\frac{3x}{2}\right)$$

$v(0,t) = v_x(\pi,t) = 0$ ת. שפה רקין.

$$v(x,0) = u(x,0) - w(x,0) = \cancel{x} + 3\pi - \cancel{x} = 3\pi$$

סה"כ:

$$\begin{cases} v_t - v_{xx} = (9t+31)\sin\left(\frac{3x}{2}\right) \\ v(0,t) = v_x(\pi,t) = 0 \\ v(x,0) = 3\pi \end{cases}$$

ת. שפה רקין הומוגניים

יכינו לבעיה שאפשר לפתור כיוון ש-ת. השפה הם הומוגניים.

נגדיר $v = v^h + v^p$ כאשר v^h פתרון לחלק

הומוגני ; v^h - לוקח תנאי התחלה של v.

$$\begin{cases} V^h_t - V^h_{xx} = 0 \\ V^h(x,0) = 3\pi \\ V^h(0,t) = V^h_x(\pi,t) = 0 \end{cases} \quad , \quad \begin{cases} V^p_t - V^p_{xx} = (9t+31)\sin\left(\frac{3x}{2}\right) \\ V^p(x,0) = 0 \\ V^p(0,t) = V^p_x(\pi,t) = 0 \end{cases}$$

שימו לב ש ת. השפה של V^h | V^p - הומוגניים כמו ת. שפה של

נפתור ראשית את ההומוגנית:

$$V^h(x,t) = X(x)\cdot T(t)$$

$$V^h(0,t) = X(0)\cdot T(t) = 0$$
$$X(0) = 0$$

$$V^h_x(\pi,t) = X'(\pi)\cdot T(t) = 0$$
$$X'(\pi) = 0$$

$$\begin{cases} \frac{X''}{X} = \frac{T'}{T} = -\lambda \\ X(0) = X'(\pi) = 0 \end{cases}$$

שטורם ליוביל
$$\begin{cases} \frac{X''}{X} = -\lambda \\ X(0) = X'(\pi) = 0 \end{cases}$$

$X'' + \lambda X(x) = 0$

$\lambda = 0$: $X'' = 0$,

$X(x) = a_0 x + b_0$, $0 = X(0) = b_0 \Rightarrow b_0 = 0$.

$X'(x) = a_0$, $0 = X'(\pi) = a_0 \Rightarrow \boxed{a_0 = 0}$

$\lambda < 0$ - אין ע"ע.

$\lambda > 0$

$$\begin{cases} X'' + \lambda X(x) = 0 \\ X(0) = X'(\pi) = 0 \end{cases}$$

$k^2 + \lambda = 0$

$k = \pm i\sqrt{\lambda}$ $\qquad X(x) = c_1\cos(\sqrt{\lambda}x) + c_2\sin(\sqrt{\lambda}x)$

$0 = X(0) = c_1$ $\qquad X(x) = c_2\sin(\sqrt{\lambda}x)$

$X'(\pi) = 0$ $\qquad X'(x) = c_2\sqrt{\lambda}\cos(\sqrt{\lambda}x)$

$c_2\cos(\sqrt{\lambda}\pi) = 0 \;/ : c_2 \neq 0$

אחרת טריוויאלי

$\sqrt{\lambda}\pi = \frac{\pi}{2} + \pi n \;/ : \pi \Leftarrow \cos(\sqrt{\lambda}\pi) = 0$

$\sqrt{\lambda} = \frac{1}{2} + n \Rightarrow \lambda_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)^2 \quad n = 0, 1, 2 \ldots$

$$\lambda_n = \left(n+\tfrac{1}{2}\right)^2 \quad , \quad X_n(x) = C_n \sin\left(\left(n+\tfrac{1}{2}\right)x\right)$$

$$\frac{T_n'}{T_n} = -\left(n+\tfrac{1}{2}\right)^2$$

$$\ln(T_n(t)) = -\left(n+\tfrac{1}{2}\right)^2 t + \tilde{C}_n \quad / e.$$

$$T_n(t) = A_n e^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)^2 t}$$

$$V^h = \sum_{n=0}^{\infty} B_n e^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)^2 t} \cdot \sin\left(\left(n+\tfrac{1}{2}\right)x\right)$$

נציב תנאי התחלה:

$$V^h(x,0) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \sin\left(\left(n+\tfrac{1}{2}\right)x\right) = 3\pi$$

נפתח את 3π לטור סינוסים

$$B_n = \frac{2}{\cancel{\pi}} \int_0^{\pi} 3\cancel{\pi} \sin\left(\left(n+\tfrac{1}{2}\right)x\right) dx$$

$$= 6 \int_0^{\pi} \sin\left(\left(n+\tfrac{1}{2}\right)x\right) dx = -\frac{6}{n+\frac{1}{2}} \left[\cos\left(\left(n+\tfrac{1}{2}\right)x\right) \right|_{x=0}^{x=\pi} = \frac{-6}{n+\frac{1}{2}}(0-1)$$

$$B_n = \frac{6}{n+\frac{1}{2}}$$

$$\boxed{V^h = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{6}{n+\frac{1}{2}} e^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)^2 t} \cdot \sin\left(\left(n+\tfrac{1}{2}\right)x\right)}$$

כעת נמצא V^p :

$$V^p(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n(t) \cdot \sin\left(\left(n+\tfrac{1}{2}\right)x\right)$$

נבדוק שתנאי שפה אכן מתקיימים

$$V^p(0,t) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n(t) \cdot \sin(0) = 0 \quad \checkmark$$

$$V^p_x(\pi,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(n+\tfrac{1}{2}\right) q_n(t) \cdot \cos\left(\left(n+\tfrac{1}{2}\right)\pi\right) = 0 \quad \checkmark$$

נקיים את המד"ח

$$V^p_t - V^p_{xx} = (9t+31)\sin\left(\tfrac{3x}{2}\right)$$

$$V^p_t - V^p_{xx} = \sum_{n=0}^{\infty} \left[q_n'(t) + \left(n+\tfrac{1}{2}\right) q_n(t)\right] \sin\left(\left(n+\tfrac{1}{2}\right)x\right) = (9t+31)\sin\left(\tfrac{3x}{2}\right)$$

נשווה מקדמים $n+\frac{1}{2}$: $q_n' + (n+\frac{1}{2})^2 q_n = 0$

$$n=1\ ,\quad q_1'(t) + \left(\frac{3}{2}\right)^2 q_1 = 9t+31$$

$$q_1'(t) + \frac{9}{4} q_1(t) = 9t+31$$

$q_1(t) = q_1^h + q_1^p$ נפתור ראשית את ההומוגני

$$q_1^{h\prime}(t) + \frac{9}{4} q_1^h(t) = 0$$

$$q_1^h(t) = C e^{-\frac{9}{4}t}$$

$$q_1^{p\prime} + \frac{9}{4} q_1^p = 9t+31$$

ננחש $q_1^p(t) = At+B$ כיוון שלא מופיע בפתרון הכללי להומוגני.

$$A + \frac{9}{4}(At+B) = 9t+31$$

$$A + \frac{9}{4}At + \frac{9}{4}B = 9t+31$$

$$\begin{cases} A + \frac{9}{4}B = 31 \\ \frac{9A}{4} = \frac{9}{1} \Rightarrow \frac{A}{4} = 1 \Rightarrow \boxed{A=4} \end{cases}$$

$$4 + \frac{9}{4}B = 31 \Rightarrow \frac{9}{4}B = 27 \Rightarrow \frac{B}{4} = 3$$

$$\boxed{B=12}$$

$$q_1^p(t) = 4t+12$$

$$q_1(t) = q_1^h(t) + q_1^p = Ce^{-\frac{9}{4}t} + 4t+12$$

$$V^p(x,0) = 0 \Rightarrow \sum q_n(0)\cdot \sin(n+\tfrac{1}{2})x = 0$$ לפי תנאי ההתחלה

$$\forall n \quad q_n(0) = 0$$

$$q_1(0) = 0 \Rightarrow q_1(0) = C+12 = 0 \Rightarrow C = -12$$

$$q_1(t) = -12e^{-\frac{9}{4}t} + 4t+12$$

עבור $n \neq 1$ $\quad q_n' + (n+\tfrac{1}{2})^2 q_n(t) = 0$

$$\Downarrow$$

$$q_n(t) = C_n e^{-(n+\frac{1}{2})^2 t}$$

$$q_n(0) = 0 \Rightarrow \boxed{C_n = 0}$$

לכן $q_n(t) = 0$ עבור $n \neq 1$.

סה"כ ל- $V^p(x,t)$ יש רק איבר אחד שמתקבל ב- $n=1$.

$$V^p = (-12 e^{-\frac{9}{4}t} + 4t + 12) \cdot \sin(\tfrac{3x}{2})$$

$$V = V^h + V^p$$

$$V = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{6}{n+\frac{1}{2}} e^{-(n+\frac{1}{2})^2 t} \sin((n+\tfrac{1}{2})x) + (-12 e^{-\frac{9}{4}t} + 4t + 12) \sin(\tfrac{3x}{2})$$

$$u = V + W$$

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{6}{n+\frac{1}{2}}\right) e^{-(n+\frac{1}{2})^2 t} \sin((n+\tfrac{1}{2})x) + (-12 e^{-\frac{9}{4}t} + 4t + 12) \sin(\tfrac{3x}{2}) + t^2 + x$$

(5)

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} + \alpha u = 0 & 0 \le x \le \pi, \quad t \geq 0 \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0 \\ u(x,0) = x(\pi - x) \end{cases}$$

משוואת חום לא הומוגנית סוג I : פותרים בדיוק כמו הומוגנית!

$$u(\pi,t) = X(\pi)\cdot T(t) = 0 \Rightarrow X(\pi) = 0$$
$$u(0,t) = X(0)\cdot T(t) = 0 \Rightarrow X(0) = 0$$

$$u(x,t) = X(x)\cdot T(t)$$

$$X(x)\cdot T'(t) - X''(x)\cdot T(t) + \alpha\cdot X(x)\cdot T(t) = 0$$

$$X(x)\cdot[T'(t) + \alpha T(t)] = X''\cdot T(t)$$

שטורם ליוביל

$$\begin{cases} \dfrac{X''}{X(x)} = \dfrac{T' + \alpha T(t)}{T(t)} = -\lambda \\ X(0) = X(\pi) = 0 \end{cases}$$

$$\lambda_n = n^2, \quad X_n(x) = C_n \sin(nx) \quad n = 1, 2, \ldots$$

$$\frac{T_n' + \alpha T_n}{T_n} = -\lambda_n = -n^2$$

$$\frac{T_n'}{T_n} + \alpha = -n^2 \Rightarrow \frac{T_n'}{T_n} = -n^2 - \alpha$$

$$\ln T_n(t) = -(n^2+\alpha)t + \tilde{C}_n \quad / e$$

$$T_n(t) = A_n e^{-(n^2+\alpha)t}$$

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n e^{-(n^2+\alpha)t} \cdot \sin(nx)$$

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin(nx) = x(\pi - x)$$

$$B_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x(\pi - x)\cdot\sin(nx)\,dx = \frac{2}{\pi}\cdot\frac{\sin^2(\frac{n\pi}{2})}{n^3}$$

$$n = 2k \Rightarrow B_{2k} = 0$$

$$n = 2k-1 \Rightarrow B_{2k-1} = \frac{2}{\pi}\cdot\frac{1}{(2k-1)^3}$$

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{(2k-1)^3} e^{-((2k-1)^2+\alpha)t} \sin((2k-1)x)$$

נפריד למקרים אם $(2k-1)^2 + \alpha > 0$

$$\lim_{t\to\infty} u(x,t) = 0$$

אם $(2k-1)^2 + \alpha = 0$.

$$\lim_{t\to\infty} u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{(2k-1)^3} \sin((2k-1)x)$$

אם $(2k-1)^2 + \alpha < 0$ $\lim_{t\to\infty} u(x,t) \to \infty$.

---

(6) יהיו u, v זוג פתרונות של משוואת החום בתחום

$0 \le x \le L$, $0 \le t < \infty$

כך ש-

$u(x,0) \le v(x,0)$

$u(0,t) \le v(0,t)$

$u(L,t) \le v(L,t)$

הוכיחו כי $u(x,t) \le v(x,t)$ לכל x ו-t בתחום.

פתרון: נסמן $w = v - u$, מתקיים:

$v_t = a^2 v_{xx}$ $0 \le x \le L$, $t \ge 0$

$u_t = a^2 u_{xx}$ $0 \le x \le L$, $t \ge 0$

$$w_t - a^2 w_{xx} = v_t - u_t - a^2(v_{xx} - u_{xx}) = \underbrace{v_t - a^2 v_{xx}}_{0} - (\underbrace{u_t - a^2 u_{xx}}_{0}) = 0$$

$\Leftarrow$ w מקיימת את משוואת החום לפי עקרון המקסימום למשוואת החום המקסימום מתקבל בשפה. מההגדרת $w = v - u$ נקבל - $w \ge 0$ לכל x ו-t בתחום

$\Leftarrow$ $u \le v$ לכל x ו-t בתחום.