

חדו"א 1 תרגיל מספר 3 תשפ"א - גבולות של סדרות המשך

ענו על השאלות הבאות:

חלק א

1. תהא (a_n) סדרה שמתכנסת לגבול L סופי (ממשי). תהא (b_n) סדרה חסומה שאינה מתכנסת. נגדיר סדרה חדשה $c_n = a_n b_n$. הוכיחו ש (c_n) מתכנסת אמ"מ $L = 0$.

2. תהיינה $(a_n), (b_n)$ סדרות המקיימות כי $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ וסדרת הסכום $a_n + b_n$ חסומה. מצאו את הגבול $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{a_n}$ (מה שגם מוכיח שהגבול קיים).

3. מצאו את הגבול של הסדרה $b_n = \sqrt[n]{\frac{(12n)!}{(n!)^{12}}}$

4. חשבו את הגבול של הסדרה $\sqrt[n]{(12^n + 7^n)}$

5. חשבו את הגבול $2^{(e^n)} - \left(\frac{1}{\sqrt[n]{e+1}} + 7\right)$

6. חשבו את הגבול של $\frac{\arctan^3(\ln n) - 5 \arctan^2(\ln n) + 3}{e^n - n^{23} + n^{21}}$

7. חשבו את הגבול של $a_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$

8. חשבו את הגבול של $a_n = \frac{8^n}{n!}$

9. חשבו את הגבול של $a_n = \sqrt[n]{n!}$

חלק ב

1. האם קיימות סדרות העונות על התנאים הבאים. אם כן, מצאו כאלה. אם לא, הוכיחו זאת (הערה: המינוח "לא קיים גבול" בתרגיל זה פירושו אין גבול בכלל - לא סופי ולא אין סופי):

(א) קיימות סדרות $(a_n), (b_n)$ כך ש $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ וגם לא קיים הגבול $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ וגם הסדרה המוגדרת $c_n = a_n b_n$ שואפת לאפס.

(ב) קיימות סדרות $(a_n), (b_n)$ כך ש $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ וגם לא קיים הגבול $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ וגם הסדרה המוגדרת $c_n = a_n b_n$ שואפת ל 1.

(ג) קיימות סדרות $(a_n), (b_n)$ כך ש $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ וגם לא קיים הגבול $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ וגם לסדרה המוגדרת $c_n = a_n b_n$ לא קיים גבול.

2. לכל ערך c מממשי חיובי, חשבו את הגבול של הסדרה $a_n = c^n - n^{100}$ (הן גבול סופי והן גבול אין סופי).

בהצלחה! 😊