11/12/17

"דילול פואסון"

$x+y$
$poi(\lambda)$

דוגמא:

מס' אנשים נכנסים לסניף בשעה ~פו"מ(λ) כל איש שנכנס הוא זכר בהסתברות P או אישה בהסתברות $1-p$. ב"ת בשאר.
נסמן את מס' הגברים הנכנסים בשעה ב-x, ואת מס' הנשים ב-y.
א) מצאו את ההתפלגות המשותפת של x ו-y.
ב) הוכיחו ש x ו-y ב"ת.
ג) מצאו את ההתפלגות השולית של x ו-y.
"דילול פואסון"

⇐ פתרון: א) אנחנו מחפשים את $P_{x,y}(i,j)$:

$$P_{x,y}(i,j)=P(x=i,y=j)=P(x=i,y=j\mid x+y=i+j)\cdot$$
$$P(x+y=i+j)+\underbrace{P(x=i,y=j\mid x+y\neq i+j)}_{=0}P(x+y\neq i+j)$$
$$=\underbrace{P(x=i,y=j\mid x+y=i+j)}_{**}\cdot\underbrace{P(x+y=i+j)}_{*}$$

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=0$$

$$(*)\ P(x+y=i+j)=e^{-\lambda}\cdot\frac{\lambda^{i+j}}{(i+j)!}$$
$x+y\sim poi(\lambda)$

$$(**)\ P(x=i,y=j\mid x+y=i+j)=P\left(\text{בהינתן } i+j \text{ אנשים שנכנסו סה"כ, } i \text{ מתוכם זכרים (אלה } j \text{ נשים)}\right)=P(Bin(i+j,p)=i)$$
$$=\binom{i+j}{i}\cdot p^i\cdot(1-p)^j$$

לסיכום ⇐ $P_{x,y}(i,j)=\binom{i+j}{i}p^i(1-p)^j\cdot e^{-\lambda}\cdot\frac{\lambda^{i+j}}{(i+j)!}=\frac{\cancel{(i+j)!}}{i!\,j!}p^i(1-p)^j e^{-\lambda}\cdot\frac{\lambda^{i+j}}{\cancel{(i+j)!}}$

$$=\frac{(p\lambda)^i}{i!}\cdot\frac{((1-p)\lambda)^j}{j!}\cdot e^{-\lambda}=e^{-p\lambda}\cdot\frac{(p\lambda)^i}{i!}\cdot e^{-(1-p)\lambda}\cdot\frac{((1-p)\lambda)^j}{j!}=P_x(i)\cdot P_y(j)$$

$$e^{-(p+1-p)\lambda}=e^{-p\lambda}\cdot e^{-(1-p)\lambda}$$

ב) נשים לב ש- $P_{x,y}(i,j)=f(i)\cdot g(j)\cdot \overset{\text{קבוע}}{c}$ כאשר $g(j)=\frac{((1-p)\lambda)^j}{j!}$, $f(i)=\frac{(p\lambda)^i}{i!}$,
$c=e^{-\lambda}$ ⇐ x,y ב"ת.

המשפט: x,y ב"ת $\Longleftrightarrow$ $P_{x,y}(i,j)=P_x(i)\cdot P_y(j)$

ג) $P_x(i)=\sum P_x(i,j)=\sum\frac{(p\lambda)^i}{i!}\cdot\frac{((1-p)\lambda)^j}{j!}\cdot e^{-\lambda}=\frac{(p\lambda)^i}{i!}\cdot e^{-\lambda}\underbrace{\sum_{j=0}^{\infty}\frac{((1-p)\lambda)^j}{j!}}_{\text{טור טיילור}}=$

$$\frac{(p\lambda)^i}{i!}\cdot e^{-\lambda}\cdot e^{+((1-p)\lambda)}$$

$$\Rightarrow P_X(i) = \frac{(\lambda p)^i}{i!} e^{-\lambda p} \Rightarrow X \sim Poi(\lambda p)$$

בדומה $Y \sim Poi(\lambda(1-p))$

משפט "דלול פואסון":

אם $X \sim Poi(\lambda)$ וידוע ש $X=k$ אז המ"מ המתקבל מ-X ע"י "דילול", כל אחד מ-k הפרטים בהסתברות p הוא $Poi(\lambda p)$.

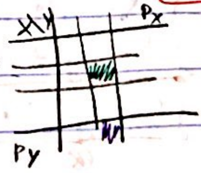
התפלגות מותנית:

בהינתן שני מאורעות A,B,
$$P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$

$X=i$ בהינתן $y=j$

עבור מ"מ, נגדיר בדומה:
$$P_{X|Y}(i|j) = P(X=i|Y=j) = \frac{P(X=i|Y=j)}{P(Y=j)} = \frac{P_{XY}(i,j)}{P_Y(j)}$$

$P_{X|Y}(i|j) = \Leftarrow$



מה קורה כאשר X,Y בת"ל?
$$P_{X|Y}(i|j) = \frac{P_{X,Y}(i,j)}{P_Y(j)} = \frac{P_X(i)\cancel{P_Y(j)}}{\cancel{P_Y(j)}} = P_X(i)$$

אכן, ההתניה ב-Y לא משנה את ההסתברות ש-$X=i$.

דוגמא:

נתונים X,Y לפי הטבלה:

X\Y	0	1	P_X
0	0.4	0.2	0.6
1	0.1	0.3	0.4
P_Y	0.5	0.5	

$$P_{X|Y}(1|0) = \frac{P_{X,Y}(1,0)}{P_Y(0)} = \frac{0.1}{0.5} = 0.2$$
$$\neq$$
$$P_X(1) = 0.4$$

$P_{X|Y}(1|0) \neq P_X(1) \Rightarrow X,Y$ תלויים.

תוחלת של פונקציה של מ"מ:

$E[g(x,y)] = ?$ על פי הדרך: (1) לסמן $Z = g(x,y)$ (2) למצוא $P_Z(t)$ (3) $E[g(x,y)] = E(Z) = \sum t P_Z(t)\ ;\ t \in Z(\Omega)$

← למעשה אנחנו משתמשים במשפט (חדש):

$$E[g(x,y)] = \sum_{i\in X(\Omega)}\sum_{j\in Y(\Omega)} g(i,j)P_{X,Y}(i,j) \xRightarrow{\text{בדומה}} E[g(X)] = \sum_{i\in X(\Omega)} g(i)P_X(i)$$

הוכחה בדומה

כלומר, אפשר להשתמש בטבלה כדי לחשב תוחלת של פונקציה $g(x,y)$.

11/12/17

המשך-

דוגמא:

אם נתון x,y מ"מ ובת"ל וניח שרוצים לחשב את:

$$\overbrace{E[f(x)\cdot h(y)]}^{g(x,y)} = \sum_i\sum_j g(i,j)P_{x,y}(i,j) \underset{בת"ל}{=} \sum_j\sum_i g(i,j)P_x(i)P_y(j)$$

$$= \sum_i\sum_j f(i)h(j)P_x(i)P_y(j) = \sum_i f(i)P_x(i)\cdot\underbrace{\sum_j h(j)P_y(j)}_{\text{קבוע ביחס ל-}i}$$

$f(i)P_x(i)$ קבועים ביחס ל-j

$$= \left(\sum f(i)P_x(i)\right)\left(\sum h(j)P_y(j)\right) = E[f(x)]\cdot E[h(y)] = \boxed{E[f(x)h(y)]}$$

x,y בת"ל

השונות המשותפת: Covarians

בהינתן x,y מ"מ נגדיר: $cov(x,y) = E[(x-E[x])(y-E[y])]$

← דומה ל- $V[x]=E[(x-E(x))^2]$

דוגמא: x,y בת"ל.

$$cov(x,y) = E[(x-E[x])(y-E[y])] = E[\underbrace{x-E[x]}_{\text{קבוע, יוצא מהתוחלת}}]\cdot E[\underbrace{y-E[y]}_{\text{אותו דבר}}]$$

$$= E[x+a] = E[x]+a \Rightarrow a = -E[x]$$

$$= (E[x]-E[x])(E[y]-E[y]) = 0\cdot 0$$

מ"מ בת"ל הם בלתי מתואמים: $cov(x,y)=0$

הגדרה

דוגמא 2:

סכום שורה = שולית.

x \ y	0	1	P_x
-1	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$
0	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
1	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$
P_x	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	

$P(y=1, x=-1)=0$

$P(x=1, y=1)=0$

$$y = \begin{cases} 0 & \text{כאשר } x\neq 0 \\ 1 & \text{כאשר } x=0 \end{cases} \qquad x = \begin{cases} 1 & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} \\ -1 & \frac{1}{3} \end{cases} \quad P_x(+)$$

$E(x) = -1\cdot\frac{1}{3}+0\cdot\frac{1}{3}+1\cdot\frac{1}{3} = 0 \mid E(y) = 0\cdot\frac{2}{3}+1\cdot\frac{1}{3} = \frac{1}{3}$

$$\Rightarrow cov(x,y) = E[(x-E(x))\cdot(y-E(y))] = E\left[(x-0)\left(y-\frac{1}{3}\right)\right] =$$

$$\sum_{i=-1,0,1}\sum_{j=0}^{1}(i-0)\left(j-\frac{1}{3}\right)\cdot P_{xy}(i,j) = -1\left(0-\frac{1}{3}\right)\cdot\frac{1}{3} + (-1)\left(1-\frac{1}{3}\right)\cdot 0 + 0\left(0-\frac{1}{3}\right)\cdot 0$$

$$+0\left(1-\frac{1}{3}\right)\cdot\frac{1}{3} + 1\left(0-\frac{1}{3}\right)\cdot\frac{1}{3} + 1\left(1-\frac{1}{3}\right)\cdot 0 = -1\left(-\frac{1}{3}\right)\cdot\frac{1}{3} + 1\left(-\frac{1}{3}\right)\cdot\frac{1}{3} = 0$$

x,y תלויים אבל $cov(x,y)=0$, כלומר בלתי מתואמים $\not\Rightarrow$ בלתי תלויים.

דוגמא 3: X מ"מ כלשהו. $y = x + 1$

$$cov(x,y) = E[(x-E[x])(y-E[y])] = E[(x-E[x])(x+\cancel{1}-E[x+\cancel{1}])] =$$

$$= E[(x-E[x])^2] = V[x].$$

דוגמא 4: דומה ל-3.

אם $y=-x+1$ אז $cov(x,y) = -V[x]$.

⇐ השונות המשותפת מודדת קשר לינארי בין שני מ"מ אם X גדול ⇐ y גדול,
ואם x קטן ⇐ y קטן אז $cov(x,y)$ יהיה חיובי.

אם X גדול ⇐ y קטן
אם X קטן ⇐ y גדול } ⇐ אז $cov(x,y)$ יהיה שלילי.

← אם אין קשר לינארי בין x,y אז $cov(x,y)=0$.

דוגמא 5:

יהיו I_A, I_B האינדיקטורים של המאורעות A,B בהתאמה.

$$I_A = \begin{cases} 1 & \text{מתרחש } A \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases} \qquad I_B = \begin{cases} 1 & \text{מתרחש } B \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}$$

← למשל אם מטילים מטבע אז הוא 1 כאשר מטבע נופל על עץ. $I\{\text{יוצא עץ}\}$

משפט:

$$cov(x,y)=E[x\cdot y]-E[x]\cdot E[y] \xRightarrow{\text{דומה ל-}} V[X]=E[x^2]-(E[x])^2$$

← ההוכחה דומה גם היא.
המשפט נותן דרך קצת יותר קלה לחישוב השונות המשותפת.

בחזרה לדוגמא 5:

$$cov(I_A,I_B) = E[I_A\cdot I_B] - E[I_A]E[I_B]$$

טענה: $I_A\cdot I_B = I_{A\cap B}$

הוכחה: $I_A\cdot I_B = 1 \iff I_B=1$ וגם $I_A=1 \iff$ B התרחש וגם
A התרחש $\iff$ $A\cap B$ התרחש.

מסקנה: $$I_A\cdot I_B = \begin{cases} 1 & \text{כאשר } A\cap B \text{ מתרחש} \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases} = I_{A\cap B}$$

$$E[I_A] = 1\cdot p(A) + 0\cdot p(A') = p(A)$$

⇐

המשך-
)3-ב;

$$cov(I_A,I_B)=E[I_{A\cap B}]-E[I_A]\cdot E[I_B]=P(A\cap B)-P(A)\cdot P(B)$$

$$=P(B)\left(\frac{P(A\cap B)}{P(B)}-P(A)\right)=P(B)\cdot\left(P(A|B)-P(A)\right)$$

← **מסקנה:**

אם בהינתן B, A סביר יותר נקבל ש- $Cov(I_A,I_B)$ חיובי, $P(A|B)>P(A)$

וזה מתאים להגיון I_B גדול (שווה 1) $\Leftarrow$ I_A גדול.

למשל אם $B=A^c$ אזי:

$I_A \backslash I_{A^c}$	0	1
0	0	$P(A^c)$
1	$P(A)$	0

$$cov(I_A,I_{A^c})=P(A^c)\cdot(P(A|A^c)-P(A))=-P(A)P(A^c)$$

$cov<0$ בדר"כ מופיע יחד עם מספרים גדולים על האלכסון.

$cov>0$ בדר"כ מופיע יחד עם מספרים גדולים על האלכסון המשני.

⊛ כאשר הערכים רשומים בסדר עולה בכיוונים

משפט:

בהינתן X,Y מ"מ, a מס' קבוע.

1. $cov(X,Y)=cov(Y,X)$
2. $cov(X,X)=V[X]$
3. $cov(X,aY)=a\,cov(X,Y)$; $cov(aX,Y)=a\,cov(X,Y)$;
   $cov(aX,bY)=ab\,cov(X,Y)$
4. $$cov\left(\sum_{i=1}^{n}X_i,\sum_{j=1}^{m}Y_j\right)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}cov(X_i,Y_j)$$

מסקנה:

$$V\left[\sum_{i=1}^{n}X_i\right]=\sum_{i=1}^{n}V[X_i]+\sum_{i=1}^{n}\sum_{\substack{j=1\\ i\neq j}}^{n}cov(X_i,X_j)$$

⊛ **הערה:** כאשר X_i,X_j ב"ת הנוסחא היא $V[\sum X_i]=\sum V[X_i]$
כי $cov(X_i,X_j)=0$ כאשר $i\neq j$

← הוכחה:

$$V\left[\sum X_i\right]\overset{2}{=}cov\left(\sum X_i,\sum X_j\right)\overset{4}{=}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}cov(X_i,X_j)=$$
$$\sum_{i=1}^{n}cov(X_i,X_i)+\sum_{i=1}^{n}\sum_{\substack{j=1\\ i\neq j}}^{n}cov(X_i,X_j)\overset{2}{=}\sum V[X_i]+\sum\sum_{i\neq j}cov(X_i,X_j)$$

דוגמא ט'

נניח $(X_1,\dots X_k)\sim Multi(n,(p_1,\dots p_k))$

מבצעים n ניסויים עם k תוצאות אפשריות לכל ניסוי באופן זהה ובלתי-תלוי. ההסתברות לתוצאה i היא p_i.

X_i - מס' הניסויים בהם יצאה התוצאה i.

נחשב את $cov(X_i,X_j)$.

← האינטואיציה: השונות המשותפת שלילית כי X_i גדול ⇐ הרבה ניסויים יצאו i ⇐ נשארו מעט ניסויים עבור תוצאה j ⇐ X_j קטן.

נסמן ב-I_{il} את האינדיקטור שבניסוי l יצאה תוצאה i.

← כלומר: $X_i=\sum_{l=1}^{n} I_{il}$

עבור $i\neq j$:

$$cov(X_i,X_j)=cov\Big(\underbrace{\sum_{l=1}^{n} I_{il}}_{\text{מס' ה-}i\text{ בכל ניסוי}},\underbrace{\sum_{m=1}^{n} I_{jm}}_{\text{מס' ה-}j\text{ בכל ניסוי}}\Big)=$$

$$=\sum\sum cov(I_{il},I_{jm})=\sum_{l}\sum_{m}\Big[P\big(\text{תוצאה } j \text{ בניסוי } m \text{ וגם תוצאה } i \text{ בניסוי } l\big)-\underbrace{P\big(\text{תוצאה } j \text{ בניסוי } m\big)}_{P(A)}\cdot\underbrace{P\big(\text{תוצאה } i \text{ בניסוי } l\big)}_{P(B)}\Big]$$

שונות משותפת של אינדיקטורים

$P(A\cap B)-P(A)P(B)$